DOI: 10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.008

含参数广义强向量均衡问题解映射在混合扰动下的连续性①

杨彦龙[1]，　夏顺友[2]

1. 贵州大学 计算机科学与技术学院，贵阳 550025；
2. 贵州师范学院 数学与计算机科学学院，贵阳 550018

摘要： 针对含参数广义强向量均衡问题，在有偏序扰动的混合扰动下，建立了其有效解映射. 证明了此解映射在更弱的条件下具有连续性. 给出一些例子阐述了该结果是最近相应文献中结果的推广，并且说明了最近文献中的结果并非真正本质的.

关　键　词： 含参数广义强向量均衡问题；下半连续；上半连续；有效解；混合扰动

中图分类号： O221.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2019)02-0036-05

向量变分不等式问题、向量互补问题、向量优化问题和向量鞍点问题等都可以统一为向量均衡问题模型[1-19]. 在优化理论中，向量均衡问题解映射的稳定性分析是重要的研究课题之一. 而稳定性可以理解为某类下半连续性、上半连续性和连续性. 最近，从不同方向上对含参数向量均衡问题的半连续性，特别是下半连续性的研究成果较多[1,2,4,6,10,15].

文献[1]首先得到了含参数多值向量均衡问题解映射的下半连续性. 之后，文献[2]得到了一般拟变分包含问题解集具有相对下半连续性质的充分条件，并且在交通网络问题这个具体实际情形中作为主要应用例子进行了仔细研究. 文献[3]得到了线性拓扑空间中含参数拟均衡问题解映射的下半连续性、Hausdorff 下半连续性、上半连续性以及连续性质. 文献[4]利用稠结果和标量化方法讨论了关于单调双函数的含参数向量均衡问题有效解集的下半连续性. 文献[5]研究了含参数弱向量均衡问题解的连续性. 最近，文献[6]得到了目标映射没有单调性和约束映射不具有紧性的含参数广义强向量均衡问题解映射的下半连续性. 文献[7]得到关于含参数隐向量均衡问题解映射的下半连续性和局部存在性. 通过不同于文献[4-5]中的方法，文献[9]得到了含参数广义向量均衡问题解映射的下半连续性和连续性. 文献[10]建立了参数广义 Ky Fan 不等式在比 C-严格单调条件弱的情形下的解映射的下半连续性. 最近，利用文献[4]的思想，文献[11]得到了集值映射含参数广义强向量均衡问题在不同于 C-严格单调条件下解映射的连续性. 文献[13]讨论了含参数向量拟均衡问题解映射的下半连续性. 文献[14]对有限维空间中弱向量变分不等式利用标量化方法建立了解映射的下半连续性. 文献[15]得到了含参数向量均衡问题在 Hölder 相关假设下解映射的下半连续性. 文献[12]推广文献[15]中的结果到集值映射含参数强向量均衡问题的情形.

但是，所有这些结果都是关于目标空间中某个固定序得到的，这些序是不因参数而变化的. 可是往往序关系是随着时间或者空间等的变化而变化的，所以在序变化的情形下研究向量均衡问题的解映射的稳定性更有实际应用意义. 基于序结构也扰动的情形，文献[12]中相应结构在较弱条件下也是成立的.

---

① 收稿日期：2018-04-25
基金项目：国家自然科学基金项目(11161008,11561013,11761023).
作者简介：杨彦龙(1980-)，男，讲师，博士研究生，主要从事博弈论与非线性分析的研究.
通信作者：夏顺友，教授.

1　预备知识

设 X 和 Z 是两个度量空间，Y 是度量线性空间，C 是 Y 中具有非空内部的尖闭凸锥，θ 是 Y 中的零元. 设 A 是 X 的非空子集，F 是从 $A\times A$ 到 Y 的向量值映射. 本文考虑锥序 C 随参数 $\lambda\in\Lambda$ 的变化而扰动的问题(PVEP)，描述为：求 $x\in A(\lambda)$，使得 $F(x,\ y,\ \lambda)\notin -C(\lambda)\backslash\{\theta\}$ 对 $\forall\, y\in A(\lambda)$ 都成立，其中对 $\forall\,\lambda\in\Lambda$，$C(\lambda)$ 是 Y 中具有非空内部的尖闭凸锥. 设 $C:\Lambda\longrightarrow 2^Y$ 是一个锥值映射，在此情形下，称问题 PVEP 是具有序扰动的含参数向量均衡问题，记为(PVOPEP). 如果点 $x\in A(\lambda)$ 满足：对 $\forall\, y\in A(\lambda)$ 都有 $F(x,\ y,\ \lambda)\notin -C(\lambda)\backslash\{\theta\}$ 成立，则称 x 为问题 PVOPEP 的一个有效解.

文献 PVOPEP 的有效解的集合记为

$$S(\lambda)=\{x\in A(\lambda):F(x,\ y,\ \lambda)\notin -C(\lambda)\backslash\{\theta\},\ \forall\, y\in A(\lambda)\}$$

于是 S 是一个集值映射 $S:\Lambda\longrightarrow 2^X$. 下面总假设 $S(\lambda)\neq\varnothing$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 都成立. 记 $B_X(\lambda,\delta)$ 是度量空间 X 中以 x 为中心、$\delta>0$ 为半径的开球，$d(\cdot\,,\cdot)$ 表示空间上两点之间的距离，$d(x,A)$ 表示点 x 到集合 $A\subset X$ 之间的距离.

定义 1　设 $f:X\longrightarrow Y$ 为向量值映射，$x_0\in X$，如果对每个包含 $f(x_0)$ 的开集 V，存在 $x_0\in X$ 的邻域 U，使得对 $\forall\, x\in U$，都有 $f(x)\subset V+C$，其中 C 是锥，则称 f 在 x_0 处是锥下半连续的.

定义 2　设 Λ 是拓扑空间，Y 是拓扑线性空间，$C:\Lambda\longrightarrow 2^Y$. 如果对 $\forall\,\lambda\in\Lambda$，$C(\lambda)$ 都是 Y 中的闭凸尖锥，则称 C 是锥值映射. 记以 θ 为中心的 Y 中的闭单位球为 $B_Y(\theta)$，如果对 $\forall\,\lambda\in\Lambda$ 和任意 Y 中的开集 U，$U\supset C(\lambda)\cap B_Y(\theta)$，存在 λ 的开集 V，使得对 $\forall\,\lambda'\in V$，$U\supset C(\lambda')\cap B_Y(\theta)$ 都成立，则称锥值映射 C 是上半连续锥值映射.

2　主要结果

下面给出问题 PVOPEP 解映射的一种下半连续性.

定理 1　假设下面的条件满足：

(a) $A(\cdot)$ 在 Λ 上是紧值连续的；

(b) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 在 $B\times B\times\Lambda$ 上是锥下半连续的；

(c) $C(\cdot)$ 在 Λ 上是上半连续锥值映射；

(d) 如果对 $\forall\,\lambda\in\Lambda$，$A(\lambda)\backslash S(\lambda)\neq\varnothing$，则对 $\forall\,\lambda\in\Lambda$，和 $\forall\, x\in A(\lambda)\backslash S(\lambda)$，存在 $y\in S(\lambda)$ 和 Λ 上的上半连续正值函数 $M:\Lambda\longrightarrow(0,+\infty)$，满足

$$d_X(x,\ y)\leqslant M(\lambda)\cdot d_Y(F(x,\ y,\ \lambda),\ Y\backslash -\operatorname{int} C(\lambda))$$

则 $S(\cdot)$ 在 Λ 上是下半连续的.

证　假设结论不成立，则存在 $\lambda_0\in\Lambda$，使得 $S(\cdot)$ 在 $\lambda_0\in\Lambda$ 处不是下半连续的. 那么，存在序列 $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ 满足 $\lambda_n\to\lambda_0$，存在 $x_0\in S(\lambda_0)$ 以及包含 x_0 的某个开集 V_1，使得对 $\forall\, x_n'\in S(\lambda_n)$，有 $x_n'\notin V_1$.

由 $x_0\in S(\lambda_0)$，有 $x_0\in A(\lambda_0)$，

$$F(x_0,\ y,\ \lambda_0)\notin -C(\lambda_0)\backslash\{\theta\}\qquad \forall\, y\in A(\lambda_0)\tag{1}$$

因为 $A(\cdot)$ 在点 λ_0 处下半连续，所以存在序列 $\{x_n\}\subset A(\lambda_n)$，使得 $x_n\to x_0$. 所以对开集 V_1，存在正整数 N，使得 $x_n\in V_1$ 对 $\forall\, n\geqslant N$ 都成立. 于是对 $\forall\, n\geqslant N$ 有 $x_n\in A(\lambda_n)\backslash S(\lambda_n)$. 为了方便叙述，仍然记为任意正整数. 由条件(d)，对 $\forall\, x_n\in A(\lambda_n)\backslash S(\lambda_n)$，存在 $y_n\in S(\lambda_n)$ 和在 Λ 上上半连续的正值函数 $M:\Lambda\longrightarrow(0,+\infty)$，使得

$$d_X(x_n,\ y_n)\leqslant M(\lambda_n)\cdot d_Y(F(x_n,\ y_n,\ \lambda_n),\ Y\backslash -\operatorname{int} C(\lambda_n))\tag{2}$$

因为 $y_n\in A(\lambda_n)$，由 $A(\cdot)$ 在每个 $\lambda_0\in\Lambda$ 处是上半连续性紧值的，则存在 $y_0\in A(\lambda_0)$ 和 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_i}\}$，使得 $y_{n_i}\to y_0$. 特别地，由(2)式有

$$d_X(x_{n_i},\ y_{n_i})\leqslant M(\lambda_{n_i})\cdot d_Y(F(x_{n_i},\ y_{n_i},\ \lambda_{n_i}),\ Y\backslash -\operatorname{int} C(\lambda_{n_i}))\tag{3}$$

由于距离函数 $d(\cdot,\cdot)$ 是连续的，$F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是锥下半连续的，$M(\cdot)$ 是上半连续的，以及 $C(\cdot)$ 是上半连续锥值映射，所以在(3)式两边令 $i\to+\infty$，可得

$$d_X(x_0, y_0) \leqslant M(\lambda_0) \cdot d_Y(F(x_0, y_0, \lambda_0), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda_0)) \tag{4}$$

如果 $x_0 \neq y_0$，由(4)式可得

$$0 < d_X(x_0, y_0) \leqslant M(\lambda_0) \cdot d_Y(F(x_0, y_0, \lambda_0), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda_0))$$

因为 $M(\lambda_0) > 0$，所以

$$d_Y(F(x_0, y_0, \lambda_0), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda_0)) > 0$$

因此，有 $F(x_0, y_0, \lambda_0) \in -\operatorname{int} C(\lambda_0)$. 在(1)式中取 $y = y_0$，得出矛盾. 所以 $x_0 = y_0$. 定理 1 证毕.

注 1　下面的例子说明定理 1 的条件(d)，或者文献[12]中定理 3.1 的条件(iii)不能应用到对某个 $\lambda \in \Lambda$，$A(\lambda) \backslash S(\lambda) = \varnothing$. 所以定理 1 的条件(d)，或者文献[12]中定理 3.1 的条件(iii)不是本质的条件.

例 1　设：

$$X = Z = \mathbb{R} \qquad \Lambda_1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right] \qquad \Lambda_2 = [2, 3]$$

$$A(\lambda) = B = [0, 1] \qquad Y = \mathbb{R}^2 \qquad C(\lambda) = \mathbb{R}^2_+$$

$$F(x, y, \lambda) = (\lambda(y - x), \lambda(y - x))$$

则由简单计算可得：

$$S_1(\lambda) = \{0\} \qquad \forall \lambda \in \Lambda_1$$

$$S_2(\lambda) = \{0\} \qquad \forall \lambda \in \Lambda_2$$

且对 $\forall \lambda \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2$，和 $\forall x \in A(\lambda) \backslash S(\lambda) = (0, 1]$，取 $y = 0 \in S(\lambda)$，有：

$$d_X(x, y) = x \qquad d_Y(F(x, y, \lambda), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda)) = \lambda x$$

显然有：

$$d_X(x, y) \geqslant d_Y(F(x, y, \lambda), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda)) \qquad \forall \lambda \in \Lambda_1$$

$$d_X(x, y) \leqslant d_Y(F(x, y, \lambda), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda)) \qquad \forall \lambda \in \Lambda_2$$

于是易见文献[12]中定理 3.1 的条件(iii)当 $\lambda \in \Lambda_1$ 时不成立. 而 $S_1(\cdot)$，$S_2(\cdot)$ 分别在 Λ_1，Λ_2 上都是连续的. 如果取 $M: \Lambda_1 \longrightarrow (0, +\infty)$ 定义为

$$M(\lambda) = 4 \qquad \forall \lambda \in \Lambda_1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$$

则有

$$d_X(x, y) \leqslant M(\lambda) \cdot d_Y(F(x, y, \lambda), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda)) \qquad \forall \lambda \in \Lambda_1$$

因此例 1 满足本文定理 1 的所有条件，于是 $S(\cdot)$ 在 Λ 上是下半连续的. 故本文定理 1 是文献[12]中定理 3.1 的真正推广.

例 2　设：

$$X = Y = \mathbb{R} \qquad C(\lambda) = \mathbb{R}_+ \qquad \Lambda = (0, 1]$$

$$A(\lambda) = B = [\lambda^2, 1 + \lambda] \qquad F(x, y, \lambda) = \lambda(y - x)$$

通过计算可得 $S(\lambda) = \{\lambda^2\}(\forall \lambda \in \Lambda)$. 容易证明 $S(.)$ 在 Λ 上是连续的.

对 $\forall \lambda \in (0, 1]$，和 $\forall x \in A(\lambda) \backslash S(\lambda) = (\lambda^2, 1 + \lambda]$，取唯一的 $y = \lambda^2 \in S(\lambda)$，有

$$x - \lambda^2 = d_X(x, y) \geqslant d_Y(F(x, y, \lambda), Y \backslash -\operatorname{int} C(\lambda)) = \lambda(x - \lambda^2)$$

显然文献[12]中定理 3.1 的条件(iii)不满足，因此文献[12]中定理 3.1 的结论不成立. 取 $M: \Lambda \longrightarrow (0, +\infty)$ 定义为 $M(\lambda) = \dfrac{a}{\lambda}(\forall \lambda \in \Lambda)$，其中 a 是常数，且 $a \geqslant 1$. 因此例 2 满足本文定理 1 的全部条件，从而 $S(\cdot)$ 在 Λ 上是下半连续的. 但是文献[12]中定理 3.1 对例 2 不成立.

例 3　设：

$$X = Y == Z = \mathbb{R} \qquad C(\lambda) = \mathbb{R}_+$$

$$\Lambda = [0, 1] \qquad A(\lambda) = B = [1 - \lambda^2, 1 + \lambda^2]$$

以及映射

$$F(x, y, \lambda) = x(1 + \lambda - y)$$

通过计算得

$$S(\lambda)=[1-\lambda^2,\ 1+\lambda^2]=A(\lambda)\qquad \forall\lambda\in\Lambda$$

对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$A(\lambda)\backslash S(\lambda)=\varnothing$. 因此没法取 $x\in A(\lambda)\backslash S(\lambda)$. 所以文献[12]中定理 3.1 的条件(iii)或者本文定理 1 的条件(d)不成立. 容易证明 $S(\cdot)$ 在 Λ 上是连续的.

同理得到问题 PVOPEP 的弱有效解的下半连续性.

如果点 $x\in A(\lambda)$ 满足

$$F(x,\ y,\ \lambda)\notin -\operatorname{int} C(\lambda)\qquad \forall x\in A(\lambda)$$

则称 x 为问题 PVOPEP 的弱有效解. 记问题 PVOPEP 的弱有效解集合为

$$S_W(\lambda)=\{x\in A(\lambda):F(x,\ y,\ \lambda)\notin -\operatorname{int} C(\lambda),\ \forall\lambda\in A(\lambda)\}$$

在定理 1 的证明过程中做小的调整就可得到关于问题 PVOPEP 弱有效解的下半连续性定理：

定理 2　假设下面的条件满足：

(a) $A(\cdot)$ 在 Λ 上是紧值连续的；

(b) $F(\cdot,\ \cdot,\ \cdot)$ 在 $B\times B\times\Lambda$ 上是锥下半连续的；

(c) $C(\cdot)$ 在 Λ 上是上半连续锥值映射；

(d) 如果对 $\forall\lambda\in\Lambda$，$A(\lambda)\backslash S_W(\lambda)\neq\varnothing$，则对 $\forall\lambda\in\Lambda$，和 $\forall x\in A(\lambda)\backslash S_W(\lambda)$，存在 $y\in S_W(\lambda)$ 和 Λ 上的上半连续正值函数 $M:\Lambda\longrightarrow(0,+\infty)$，满足

$$d_X(x,\ y)\leqslant M(\lambda)\cdot d_Y(F(x,\ y,\ \lambda),\ Y\backslash -\operatorname{int} C(\lambda))$$

则 $S_W(\cdot)$ 在 Λ 上是下半连续的.

注 2　如果 Λ 是完备度量空间，解空间为任意度量空间，则可以得到 $S(\cdot)$ 和 $S_W(\cdot)$ 的连续点构成 Λ 的稠密剩余子集 Q，即 $S(\cdot)$ 和 $S_W(\cdot)$ 在 Q 上是连续的，或者说 $S(\cdot)$ 和 $S_W(\cdot)$ 是通有连续的或通有稳定的.

参考文献：

[1] GONG X H，YAO J C. Lower Semicontinuity of the Set of Efficient Solutions for Generalized Systems [J]. J Optim Theory Appl，2008，138(2)：197－205.

[2] GONG X H. Continuity of the Solution Set to Parametric Weak Vector Equilibrium Problems [J]. J Optim Theory Appl，2008，139(1)：35－46.

[3] HAN Y，GONG X H. Lower Semicontinuity of Solution Mapping to Parametric Generalized Strong Vector Equilibrium Problems [J]. Applied Mathematics Letters，2014，28：38－41.

[4] HUANG N J，LI J，THOMPSON H B. Stability for Parametric Implicit Vector Equilibrium Problems [J]. Math Comput Modelling，2006，43(11)：1267－1274.

[5] CHEN B，HUANG N J. Continuity of the Solution Mapping to Parametric Generalized Vector Equilibrium Problems [J]. J Global Optim，2012，56(4)：1515－1528.

[6] ANH L Q，KHANH P Q. Semicontinuity of the Solution Set of Parametric Multivalued Vector Quasiequilibrium Problems [J]. J Math Anal Appl，2004，294(2)：699－711.

[7] ANH L Q，KHANH P Q. Semicontinuity of Solution Sets to Parametric Quasivariational Inclusions with Applications to Traffic Networks II：Lower Semicontinuities Applications [J]. Set-Valued Anal，2008，16：943－960.

[8] ANH L Q，KHANH P Q. Continuity of Solution Maps of Parametric Quasiequilibrium Problems [J]. J Global Optim，2010，46(2)：247－259.

[9] KIMURA K，YAO J C. Sensitivity Analysis of Solution Mappings of Parametric Vector Quasi-Equilibrium Problems [J]. J Global Optim，2008，41(2)：187－202.

[10] CHENG Y H，ZHU D L. Global Stability Results for the Weak Vector Variational Inequality [J]. J Global Optim，2005，32(4)：543－550.

[11] ZHANG W Y，FANG Z M，ZHANG Y. A Note on the Lower Semicontinuity of Efficient Solutions for Parametric Vector Equilibrium Problems [J]. Appl Math Lett，2013，26(4)：469－472.

[12] WANGKEEREE R，WANGKEEREE R，PREECHASILP P. Continuity of the Solution Mappings to Parametric Generalized Vector Equilibrium Problems [J]. Appl Math Lett，2014，29：42－45.

[13] CHEN C R, LI S J, TEO K L. Solution Semicontinuity of Parametric Generalized Vector Equilibrium Problems [J]. J Global Optim, 2009, 45: 309-318.

[14] LI S J, FANG Z M. Lower Semicontinuity of the Solution Mappings to a Parametric Generalized Ky Fan Inequality [J]. J Optim Theory Appl, 2010, 147(3): 507-515.

[15] LI S J, LIU H Y, ZHANG Y, et al. Continuity of the Solution Mappings to Parametric Generalized Strong Vector Equilibrium Problems [J]. J Global Optim, 2013, 55(3): 597-610.

[16] PENG Z Y , LIN Z, YU K Z, et al. A Note on Solution Lower Semicontinuity for Parametric Generalized Vector Equilibrium Problems [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014(1): 325-334.

[17] GONG X H. Continuity of the Solution Set to Parametric Weak Vector Equilibrium Problems [J]. Operations Research Transactions, 2008, 139(1): 35-46.

[18] XIA S Y, XIANG S W, YANG Y L, et al. Lower Semicontinuity of Solutions for Order-Perturbed Parametric Vector Equilibrium Problems [J]. Math Sci, 2016, 10: 41-45.

[19] 熊昀暄，陈剑尘. 含参集值强向量均衡问题近似解的连续性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(4)：89-94.

On Continuity of Solution Mapping to Parametric Generalized Strong Vector Equilibrium Problems with Mixed Perturbations

YANG Yan-long[1], XIA Shun-you[2]

1. School of Computer Science & Technology, Guizhou University, Guiyang 550025, China;

2. School of Mathematics & Computer Science, Guizhou Education University, Guiyang 550018, China

Abstract: The continuity of the efficient solutions mappings for parametric generalized strong vector equilibrium problems with mixed perturbations under more weaker assumptions than the ones in the literatures is achieved. Some examples are given to illustrate that our results are real extension different from recent ones in the literature, which proves the essential conditions of the latest results in the literatures are not real essential.

Key words: parametric generalized strong vector equilibrium problems; lower semicontinuity; upper semicontiuity; efficient solutions; mixed perturbation

责任编辑 廖 坤