DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.03.002

Rosenau-KdV-RLW 方程的一个两层线性化差分方法[①]

李佳佳，　王　希，　张　虹，　胡劲松

西华大学 理学院，成都 610039

摘要： 对带有齐次边界条件的 Rosenau-KdV-RLW 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个具有二阶理论精度的两层线性化差分格式，该格式合理地模拟了原问题的一个守恒性质，证明了差分解的存在唯一性，在不能得到其差分解的最大模估计的情况下，综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法，直接证明了该格式的收敛性和稳定性. 数值实验表明该方法是可靠的.

关　键　词： Rosenau-KdV-RLW 方程；线性化差分格式；守恒；收敛性；稳定性

中图分类号：O241.82　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)03-0005-07

在进行非线性波动方程研究时，为了克服 KdV 方程不能描述波-波及波-墙相互作用关系的不足，文献[1－2]提出了 Rosenau-KdV 方程. 作为非线性波的进一步考虑，得到了 Rosenau-KdV-RLW 方程[3-5]

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{1}$$

方程(1) 因描述了大量的物理现象而占有重要地位[6].

本文考虑如下一类 Rosenau-KdV-RLW 方程初边值问题：

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0,\ x \in (x_L,\ x_R),\ t \in (0,\ T] \tag{2}$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x),\quad x \in [x_L,\ x_R] \tag{3}$$

$$u(x_L,\ t) = u(x_R,\ t) = 0,\ u_{x\ x}(x_L,\ t) = u_{x\ x}(x_R,\ t) = 0,\ t \in [0,\ T] \tag{4}$$

其中 $u_0(x)$ 是一个已知的光滑函数. 问题(2)－(4) 具有如下守恒律[3-5]：

$$Q(t) = \int_{x_L}^{x_R} u(x,\ t)\mathrm{d}x = \int_{x_L}^{x_R} u_0(x)\mathrm{d}x = Q(0) \tag{5}$$

其中 $Q(0)$ 为仅与初始条件有关的常数.

文献[7] 对方程(1) 提出了一个两层非线性差分格式，但数值求解时需要迭代；文献[8] 对方程(1) 提出了一个三层线性差分格式，但该格式不是自启动的；文献[9－11] 又进一步对方程(1) 的广义形式进行了数值研究. 本文对问题(2)－(4) 提出了一个新的具有二阶理论精度的两层线性化差分格式，并合理地模拟了守恒律，数值算例表明该格式是可靠的.

1　差分格式及其守恒律

对区域$[x_L,\ x_R] \times [0,\ T]$作网格剖分，取空间步长 $h = \dfrac{x_R - x_L}{J}$，时间步长为 τ，$x_j = x_L + jh(0 \leqslant$

① 收稿日期：2018-04-02

基金项目：国家自然科学基金项目(11701481)；四川省教育厅重点科研基金项目(16ZA0167)；西华大学重点科研基金项目(Z1513324).

作者简介：李佳佳(1992-)，女，硕士研究生，主要从事微分方程数值解研究.

$j \leqslant J$)，$t_n = n\tau(n = 0, 1, 2, \cdots, N,\ N = \left[\dfrac{T}{\tau}\right])$. 记 $u_j^n = u(x_j, t_n)$，$U_j^n \approx u(x_j, t_n)$ 和 $Z_h^0 = \{U = (U_j) \mid U_{-1} = U_0 = U_J = U_{J+1} = 0,\ j = -1, 0, \cdots, J, J+1\}$，用 C 表示与 τ 和 h 无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值)，并定义如下记号：

$$(U_j^n)_x = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h},\ (U_j^n)_{\bar{x}} = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h},\ (U_j^n)_{\hat{x}} = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h},\ (U_j^n)_t = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau}$$

$$U_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2},\ \langle U^n, V^n\rangle = h\sum_{j=1}^{J-1} U_j^n V_j^n,\ \|U^n\|^2 = \langle U^n, U^n\rangle,\ \|U^n\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant J-1} |U_j^n|$$

对问题(2)-(4)考虑如下有限差分格式：

$$(U_j^n)_t - (U_j^n)_{x\bar{x}t} + (U_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t} + (U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + (U_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}\left[U_j^n (U_j^{n+1})_{\hat{x}} + U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}\right] = 0 \tag{6}$$

$$U_j^0 = u_0(x_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, J \tag{7}$$

$$U^n \in Z_h^0,\ (U_0^n)_{x\bar{x}} = (U_J^n)_{x\bar{x}} = 0 \qquad n = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

定理 1 设 $u_0 \in H_0^2$，则差分格式(6)-(8)关于以下离散能量是守恒的，即

$$Q^n = h\sum_{j=1}^{J-1} U_j^n = Q^{n-1} = \cdots = Q^0 \tag{9}$$

其中 $n = 1, 2, \cdots, N$.

证 将(6)式两端乘以 h 然后对 j 从1到 $J-1$ 求和，得

$$h\sum_{j=1}^{J-1}\left\{(U_j^n)_t - (U_j^n)_{x\bar{x}t} + (U_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t} + (U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + (U_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}\left[U_j^n (U_j^{n+1})_{\hat{x}} + U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}\right]\right\} = 0 \tag{10}$$

根据边界条件(8)和分部求和公式[12]，有

$$h\sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)_{x\bar{x}t} = 0 \tag{11}$$

$$h\sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t} = 0 \tag{12}$$

$$h\sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} = h\sum_{j=1}^{J-1} \frac{U_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} = 0 \tag{13}$$

$$h\sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}} = 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned} h\sum_{j=1}^{J-1}\left\{\frac{1}{2}\left[U_j^n (U_j^{n+1})_{\hat{x}} + U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}\right]\right\} &= \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1} U_j^n (U_j^{n+1})_{\hat{x}} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1} U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}} = \\ &\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1} U_j^n (U_j^{n+1})_{\hat{x}} - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{j-1} (U_j^{n+1})_{\hat{x}} U_j^n = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

将(11)-(15)式代入(10)式，整理有

$$h\sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+1} - U_j^n) = 0 \tag{16}$$

由 Q^n 的定义，将(16)式对 n 递推可得(9)式.

2 差分格式的可解性

定理 2 若时间步长 τ 充分小，则差分格式(6)-(8)是唯一可解的.

证 用数学归纳法. 显然 U^0 是由初始条件(7)式唯一确定的. 假设 $U^n (n \leqslant N-1)$ 是唯一可解的，可设

$$\|U^n\|_\infty \leqslant C \qquad n \leqslant N-1 \tag{17}$$

现在来考虑方程(6)中的 U^{n+1}，有

$$\frac{1}{\tau}U_j^{n+1} - \frac{1}{\tau}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}} + \frac{1}{\tau}(U_j^{n+1})_{xx\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{\hat{x}} + \frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}\hat{x}} =$$

$$-\frac{1}{2}[U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}] \tag{18}$$

将(18)式与 U^{n+1} 作内积，由边界条件(8)式和分部求和公式[12] 有

$$\frac{1}{\tau}\|U^{n+1}\|^2+\frac{1}{\tau}\|U_x^{n+1}\|^2+\frac{1}{\tau}\|U_{xx}^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle+\frac{1}{2}\langle U_{x\bar{x}\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=$$

$$-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]U_j^{n+1} \tag{19}$$

$$\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0 \tag{20}$$

$$\langle U_{x\bar{x}\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0 \tag{21}$$

又

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]U_j^{n+1}=\\&-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}U_j^{n+1}=\\&-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n[(U_j^{n+1})^2]_{\hat{x}}=\\&-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n[U_{j+1}^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}](U_j^{n+1})_{\hat{x}}\leqslant\\&Ch\sum_{j=1}^{J-1}|(U_j^{n+1})_{\hat{x}}|\cdot|U_j^{n+1}|+Ch\sum_{j=1}^{J-1}[|U_{j+1}^{n+1}|+|U_{j-1}^{n+1}|]\cdot|(U_j^{n+1})_{\hat{x}}|\leqslant\\&C(\|U_x^{n+1}\|^2+\|U^{n+1}\|^2)\end{aligned} \tag{22}$$

将(20)－(22)式代入(19)式，整理有

$$(1-C\tau)\|U^{n+1}\|^2+(1-C\tau)\|U_x^{n+1}\|^2+\|U_{xx}^{n+1}\|^2\leqslant 0$$

于是只要取 τ 足够小，使得当 $1-C\tau>0$ 时，方程组(18)仅有零解．因此，差分格式(6)－(8)中的 U_j^{n+1} 是唯一可解的．

3　差分格式收敛性和稳定性

差分格式(6)－(8)的截断误差定义如下：

$$r_j^n=(u_j^n)_t-(u_j^n)_{x\bar{x}t}+(u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}}+$$

$$\frac{1}{2}[u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}+u_j^{n+1}(u_j^n)_{\hat{x}}]$$

$$j=1,2,\cdots,J-1\qquad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{23}$$

$$u_j^0=u_0(x_j)\qquad j=1,2,\cdots,J-1 \tag{24}$$

$$u^n\in Z_h^0\qquad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{25}$$

由 Taylor 展开可知，当 $h,\tau\to 0$ 时，

$$|r_j^n|=O(\tau^2+h^2) \tag{26}$$

引理 1[10]　设 $u_0\in H^1$，则初边值问题(2)－(4)的解满足：

$$\|u\|_{L_2}\leqslant C,\ \|u_x\|_{L_2}\leqslant C,\ \|u_{xx}\|_{L_2}\leqslant C,\ \|u\|_{L_\infty}\leqslant C,\ \|u_x\|_{L_\infty}\leqslant C$$

定理 3　设 $u_0\in H^1$，若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小，则差分格式(11)－(13)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到初边值问题(2)－(4)的解，且收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$．

证　用数学归纳法．

记 $e_j^n=u_j^n-U_j^n$，由(23)式减去(6)式，有

$$r_j^n=(e_j^n)_t-(e_j^n)_{x\bar{x}t}+(e_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}}+P_1+P_2 \tag{27}$$

$$j = 1,2,\cdots,J-1 \qquad n = 1,2,\cdots,N-1$$

$$e_j^0 = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,J-1 \tag{28}$$

$$e^n \in Z_h^0 \qquad n = 1,2,\cdots,N-1 \tag{29}$$

其中

$$P_1 = \frac{1}{2}[u_j^n (u_j^{n+1})_{\hat{x}} - U_j^n (U_j^{n+1})_{\hat{x}}]$$

$$P_2 = \frac{1}{2}[u_j^{n+1} (u_j^n)_{\hat{x}} - U_j^{n+1} (U_j^{n+1})_{\hat{x}}]$$

由引理 1 以及(26)式知，存在与 τ 和 h 无关的常数 C_u 和 C_r，使得

$$\| u_x^n \|_\infty \leqslant C_u \qquad \| r^n \|_\infty \leqslant C_r(\tau^2 + h^2) \qquad n = 1,2,\cdots,N-1 \tag{30}$$

再由(28)式以及初始条件(7)可得到以下估计式：

$$\| e^0 \| = 0 \qquad \| U^0 \|_\infty \leqslant C_u \tag{31}$$

现在假设

$$\| e^l \| + \| e_x^l \| + \| e_{xx}^l \| \leqslant C_l(\tau^2 + h^2) \qquad l = 1,2,\cdots,n \qquad n \leqslant N-1 \tag{32}$$

其中 $C_l(l = 1,2,\cdots,n)$ 为与 τ 和 h 无关的常数. 则由离散 Sobolev 不等式[12] 和 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}
\| e^l \|_\infty \leqslant & C_0 \sqrt{\| e^l \|} \sqrt{\| e_x^l \| + \| e^l \|} \leqslant \\
& \frac{1}{2}C_0(2\| e^l \| + \| e_x^l \|) \leqslant \\
& \frac{3}{2}C_0 C_l(\tau^2 + h^2) \qquad l = 1,2,\cdots,n
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\| U^l \|_\infty \leqslant \| u^l \|_\infty + \| e^l \|_\infty \leqslant C_u + \frac{3}{2}C_0 C_l(\tau^2 + h^2) \qquad l = 1,2,\cdots,n \tag{34}$$

将(27)式两端与 $e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积，由边界条件(29)和分部积分和公式[12] 整理得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\| e^n \|_t^2 + \frac{1}{2}\| e_x^n \|_t^2 + \frac{1}{2}\| e_{xx}^n \|_t^2 + \langle e_x^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle + \langle e_{x\bar{x}\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = \\
& \langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle - \langle P_1, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle - \langle P_2, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle
\end{aligned} \tag{35}$$

由引理 1 以及微分中值定理，有

$$(u_j^{n+1})_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - (x_{j-1}, t_{n+1})}{2h} = \frac{\partial}{\partial x}u(x_{\xi_j}, t_{n+1})(x_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1})$$

即

$$\| u_{\hat{x}}^{n+1} \|_\infty \leqslant C_u \tag{36}$$

再取 τ 和 h 充分小，使

$$\frac{3}{2}C_0 \cdot (\max_{0\leqslant l\leqslant n} C_l)(\tau^2 + h^2) \leqslant 1 \tag{37}$$

$$\langle e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = 0 \tag{38}$$

$$\langle e_{x\bar{x}\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = 0 \tag{39}$$

于是，由(34),(36)式和(37)式以及 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}
-\langle P_1, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = & -\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[u_j^n (u_j^{n+1})_{\hat{x}} - U_j^n (U_j^{n+1})_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}} = \\
& -\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[e_j^n (u_j^{n+1})_{\hat{x}} + U_j^n (e_j^{n+1})_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}} \leqslant \\
& \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}|e_j^n| \cdot |(u_j^{n+1})_{\hat{x}}| \cdot |e_j^{n+\frac{1}{2}}| + \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}|U_j^n| \cdot |(e_j^{n+1})_{\hat{x}}| \cdot |e_j^{n+\frac{1}{2}}| \leqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}C_u(\|e^n\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)+\frac{1}{4}\Big[C_u+\frac{3}{2}C_0C_n(\tau^2+h^2)\Big](\|e_x^{n+1}\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)\leqslant$$
$$\frac{1}{8}C_u(3\|e^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2)+\frac{1}{8}(C_u+1)(2\|e_x^{n+1}\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2) \tag{40}$$

$$-\langle P_2,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[u_j^{n+1}(u_j^n)_{\hat{x}}-U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}}=$$
$$-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[u_j^{n+1}(e_j^n)_{\hat{x}}+e_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}}=$$
$$-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^{n+1}(e_j^n)_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(e_j^{n+1}e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}=$$
$$-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^{n+1}(e_j^n)_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n[e_{j+1}^{n+1}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+(e_j^{n+1})_{\hat{x}}e_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}]\leqslant$$
$$\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}|u_j^{n+1}|\cdot|(e_j^n)_{\hat{x}}|\cdot|e_j^{n+\frac{1}{2}}|+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}|U_j^n|[|e_{j+1}^{n+1}|\cdot$$
$$|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}|+|(e_j^{n+1})_{\hat{x}}|\cdot|e_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}|]\leqslant$$
$$\frac{1}{4}C_u(\|e_x^n\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)+\frac{1}{4}\Big[C_u+\frac{3}{2}C_0C_n(\tau^2+h^2)\Big]\times$$
$$(\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)\leqslant$$
$$\frac{1}{8}C_u(2\|e_x^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+$$
$$\frac{1}{8}(C_u+1)(3\|e^{n+1}\|^2+3\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e^n\|^2) \tag{41}$$

$$\langle r^n,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\frac{1}{2}\langle r^n,e^{n+1}+e^n\rangle\leqslant\frac{1}{2}\|r^n\|^2+\frac{1}{4}(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2) \tag{42}$$

将(38)—(42)式代入(35)式，由边界条件(29)式和分部求和公式[12]，整理得

$$(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)+(\|e_{xx}^{n+1}\|^2-\|e_{xx}^n\|^2)\leqslant$$
$$\tau\|r^n\|^2+\frac{1}{2}\tau(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+\frac{1}{2}\tau C_u(\|e^{n+1}\|^2+2\|e^n\|^2+\|e_x^n\|^2)+$$
$$\frac{1}{4}\tau(C_u+1)(4\|e^{n+1}\|^2+2\|e^n\|^2+5\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)\leqslant$$
$$\tau\|r^n\|^2+\frac{3}{2}\tau(C_u+1)(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2) \tag{43}$$

将(43)式从 1 到 n 递推求和，并整理有

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^{n+1}\|^2\leqslant\|e^1\|^2+\|e_x^1\|^2+\|e_{xx}^1\|^2+\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|+$$
$$\tau\sum_{k=1}^{n+1}3(C_u+1)(\|e^k\|^2+\|e_x^k\|^2) \tag{44}$$

由(30)式有

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|r^k\|^2\leqslant T(C_r)^2(\tau^2+h^2)^2 \tag{45}$$

将(32),(45)式代入(44)式，利用离散 Gronwall 不等式[12]，取时间步长充分小以满足：

$$\tau<\frac{1}{6(C_u+1)}$$

于是有

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^{n+1}\|^2\leqslant(T(C_r)^2+C_1^2)(\tau^2+h^2)^2\exp(2T(3(C_u+1)))\leqslant$$
$$(C_{n+1})^2(\tau^2+h^2)^2\qquad n=1,2,\cdots,N-1$$

其中

$$C_{n+1} = (\sqrt{T}C_r + C_1)\exp(3T(C_u + 1))$$

显然 C_{n+1} 为与 n 无关的常数. 从而由归纳假设有

$$\| e^n \| \leqslant O(\tau^2 + h^2),\ \| e_x^n \| \leqslant O(\tau^2 + h^2),\ \| e_{xx}^n \| \leqslant O(\tau^2 + h^2) \qquad n = 1,2,\cdots,N-1$$

最后由离散 Sobolev 不等式[12], 有

$$\| e^n \|_\infty \leqslant O(\tau^2 + h^2) \qquad n = 1,2,\cdots,N-1$$

定理 4 设 $u_0 \in H^1$, $\rho_0 \in L_2$, 若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小, 则差分格式(6)-(8)的解满足:

$$\| U^n \|_\infty \leqslant \widetilde{C}_0 \qquad n = 1,2,\cdots,N$$

其中 $\widetilde{C}_0$ 是与 τ 和 h 无关的常数.

定理 5 在定理 3 的条件下, 差分格式(6)-(8)的解 U^n 以 $\| \cdot \|_\infty$ 关于初值无条件稳定.

4 数值实验

方程(1)的孤波解[3]

$$u(x,t) = \frac{35(313 - 13\sqrt{457})}{12(13\sqrt{457} - 241)} \times \operatorname{sec}\left[h^4\left[\frac{\sqrt{2\sqrt{457} - 26}}{24} \times \left(x - \frac{72}{13\sqrt{457} - 241}t\right)\right]\right]$$

在计算中, 取初值函数 $u_0(x) = u(x,0)$, 固定 $x_L = -30$, $x_R = 120$, $T = 40$. 就 τ 和 h 的不同取值对数值解和孤波解在几个不同时刻的误差见表 1, 对守恒律(5)的数值模拟见表 2.

表 1 数值解和孤波解在不同时刻的误差

	$\| e \|_\infty$			$\| e \|$		
t	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$
10	9.116 344 3e-3	2.283 746 3e-3	5.706 869 6e-4	2.411 333 8e-2	6.039 173 6e-3	1.507 981 4e-3
20	1.725 481 2e-2	4.322 316 7e-3	1.078 398 6e-3	4.610 614 3e-2	1.154 874 7e-2	2.879 013 6e-3
30	2.532 281 8e-2	6.343 764 7e-3	1.580 225 0e-3	6.785 599 7e-2	1.699 754 5e-2	4.230 409 9e-3
40	3.338 624 9e-2	8.364 921 7e-3	2.080 256 0e-	8.959 944 49e-2	2.244 475 3e-2	5.576 948 7e-3

表 2 差分格式对守恒量 Q^n 的数值模拟

t	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$
10	2.167 925 796 35	2.167 925 751 22	2.167 926 259 78
20	2.167 925 426 02	2.167 925 681 43	2.167 926 885 96
30	2.167 916 010 93	2.167 923 282 71	2.167 926 923 83
40	2.167 939 181 61	2.167 928 920 73	2.167 928 950 97

从数值算例可以看出, 本文对初边值问题(2)-(4)提出的差分格式(6)-(8)是有效的.

参考文献:

[1] ZHENG M B, ZHOU J. An Average Linear Difference Scheme for the Generalized Rosenau-KdV Equation [J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014(2): 1-9.

[2] 胡劲松, 谢小平, 胡 兵, 等. Rosenau-KdV 方程的 Crank-Nicolson 守恒差分格式 [J]. 高等学校计算数学学报, 2015, 37(4): 360-369.

[3] ALEJANDRO A F, RAMOS J I. Numerical Solution of the Generalized, Dissipative KdV-RLW-Rosenau Equation with a Compact Method [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 60: 165-183.

[4] SANCHEZ P, EBADI G, MOJAVER A, et al. Solitons and Other Solutions to Perturbed Rosenau-KdV-RLW Equation with Power Law Nonlinearity [J]. Acta Physica Polonica A, 2015, 127(6): 1577-1586.

[5] RAZBOROVA P, AHMED B, BISWAS A. Solitons, Shock Waves and Conservation Lawes of Rosenau-KdV-RLW Equation with Power Law Nonlinearity [J]. Applied Mathematics and Information Sciences, 2014, 8(2): 485-491.

[6] PEREGRINE D H. Calculations of the Development of an Undular Bore [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1966, 25(2): 321-330.

[7] PAN X T, WANG Y J, ZHANG L M. Numerical Analysis of a Pseudo-Compact C-N Conservative Scheme for the Rosenau-KdV Equation Coupling with the Rosenau-RLW Equation [J]. Boundary Value Problems, 2015, 2015(1): 65-82.

[8] WONGSAIJAI B, POOCHINAPAN K. A Three-Level Average Implicit Finite Difference Scheme to Solve Equation Obtained by Coupling the Rosenau - KdV Equation and the Rosenau - RLW Equationy [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 245: 289-304.

[9] TURGUT A, KARAKOC S B G, BISWAS A. Numerical Scheme to Dispersive Shallow Water Waves [J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2016 , 13(10): 7084-7092.

[10] 卓　茹，李佳佳，黄妗彤，等. 求解广义 Rosenau-KdV-RLW 方程的守恒差分格式 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2017，54(4)：703-707.

[11] WANG X F, DAI W Z. A Three-Level Linear Implicit Conservative Scheme for the Rosenau-KdV-RLW Equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 330: 295-306.

[12] ZHOU Y L. Applications of Discrete Functional Analysis to the Finite Difference Method [J]. Fourier, 1990, 8(1): 49-65.

A Two-Level Linearized Difference Scheme for Rosenau-KdV-RLW Equation

LI Jia-jia, WANG Xi, ZHANG Hong, HU Jin-song

School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China

Abstract: In this paper, the numerical solution of initial-boundary value problem for Rosenau-KdV-RLW equation with homogeneous boundary has been considered. A two-level linearized difference scheme with the second order has been proposed. The difference scheme simulates the conservation property of the problem quite well. The existence and uniqueness of the difference solutions have also beenproved. In the case that the maximum mold estimator of the difference solutions cannot be obtained, it is proved that the difference scheme is convergent and stable by mathematical induction and the discrete function analysis. And the results are demonstrated by the numerical examples.

Key words: Rosenau-KdV-RLW equation; the linearized difference scheme; conservation; convergence; stability

责任编辑　张　构