第 44 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 3 月
Vol. 44 No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Mar. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.03.004

高斯序列顺序统计量幂的高阶展开①

冯　帆，　彭作祥

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 对给定的最优规范常数，研究高斯序列顺序统计量幂的分布函数和密度函数的高阶展开，同时得到其收敛速度均与$\frac{1}{\log n}$同阶.

关　键　词： 高斯序列；顺序统计量幂；高阶展开；收敛速度

中图分类号： O211.4　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2019)03－0018－05

令 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots$ 为一列独立同分布于标准正态分布 $N(0, 1)$ 的随机变量. $\Phi(x)$ 和 $\phi(x)$ 为标准正态分布函数和密度函数. $\boldsymbol{X}_{n,1} \leqslant \boldsymbol{X}_{n,2} \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{X}_{n,n}$ 为 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 的顺序统计量. 文献[1]得到当 a_n, b_n 满足

$$n\phi(b_n) = b_n,\ a_n = \frac{1}{b_n} \tag{1}$$

时，$\Phi^n(a_n x + b_n) - \Lambda(x)$ 收敛到 0 的一致收敛速度为$\frac{1}{\log n}$. 进一步，文献[2]研究了高斯序列顺序统计量幂的渐近展开及收敛速度，得到对任意 $r \geqslant 1$，$t \geqslant 0$，存在规范常数 $c_n > 0$ 和 $d_n \in \mathbb{R}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^t \leqslant c_n x + b_n) = \Lambda_r(x)$$

其中：$\Lambda_r(x) = \Lambda(x)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}$，$x \in \mathbb{R}$，规范常数 c_n, d_n 满足

$$c_n = t b_n^{t-2},\ d_n = b_n^t \tag{2}$$

当 $t = 2$ 时，亦可取如下的规范常数：

$$c_n = 2 - 2b_n^{-2},\ d_n = b_n^2 - 2b_n^{-2} \tag{3}$$

b_n 由(1)式决定. 文献[2]指出，当 $t = 2$ 且规范常数由(3)式给出时收敛速度最快. 在此基础上，文献[3]研究了高斯序列最大值幂的分布函数与密度函数的高阶展开，得到与文献[2]一致的结论.

文献[4－7]研究了其他给定分布序列的极值分布函数的渐近性质.

本文旨在研究高斯序列顺序统计量幂 $|\boldsymbol{X}_{n,r}|^t$ 的分布函数与密度函数的高阶展开，并试图从中找出相应的收敛速度.

定理 1　对任意给定常数 $1 \leqslant r \leqslant n$，$t \geqslant 0$ 及充分大的 n，当 $t > 0$ 时，规范常数 c_n 和 d_n 取自(2)式，则

$$\mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^t \leqslant c_n x + d_n) =$$
$$\Lambda(x)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!} + \frac{\mathrm{e}^{-rx}}{(r-1)!}\left(1 + x + \frac{2-t}{2}x^2\right)a_n^2 + \left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}\left(-j\mathrm{e}^{-x} + \frac{j(j-1)}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\cdot\right.\right.$$

① 收稿日期：2018－09－17
作者简介：冯　帆(1994－)，女，硕士研究生，主要从事极值统计研究.
通信作者：彭作祥，博士，教授.

$$\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)^2-\frac{e^{-rx}}{(r-1)!}\left(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+\frac{(t-2)^2}{8}x^4\right)\Bigg)a_n^4+O(a_n^6)\Bigg)$$

当 $t=2$ 时，规范常数 c_n 和 d_n 取自(3)式，则

$$\mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^2\leqslant c_nx+d_n)=$$

$$\Lambda(x)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{e^{-jx}}{j!}-\frac{e^{-rx}}{(r-1)!}\left(\frac{7}{2}+3x+x^2\right)a_n^4+\frac{e^{-rx}}{(r-1)!}\left(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\right)a_n^6+O(a_n^8)\right)$$

推论 1 由定理 1 有 $t>0$ 时，$\mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^t\leqslant c_nx+d_n)$ 收敛到 $\Lambda(x)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{e^{-jx}}{j!}$ 的速度与 $\frac{1}{\log n}$ 同阶；$t=2$ 时，$\mathrm{P}(|X_{n,n-r+1}|^2\leqslant c_nx+d_n)$ 收敛到 $\Lambda(x)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{e^{-jx}}{j!}$ 的速度与 $\frac{1}{(\log n)^2}$ 同阶.

定理 2 令 $f_n(x)$ 为 $\mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^t\leqslant c_nx+d_n)$ 的密度函数，当 $t>0$ 时，规范常数 c_n 和 d_n 取自(2)式，对充分大的 n，有

$$f_n(x)=\Lambda'(x)\frac{e^{-(r-1)x}}{(r-1)!}\Bigg(1+\left(1+e^{-x}-r+(2-t-r+e^{-x})x+\frac{2-t}{2}(e^{-x}-r)x^2\right)a_n^2+$$
$$\Bigg((r-e^{-x}-1)\left(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+\frac{(t-2)^2}{8}x^4\right)+$$
$$\frac{(r-e^{-x}-1)^2-r+1}{2}\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)^2+x(e^{-x}-1)\left(1-t+\frac{t-2}{2}x^2\right)\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)+$$
$$x^2\left(\frac{(1-t)(1-2t)}{2}+\frac{5(1-t)(t-2)}{6}x+\frac{(t-2)^2}{8}x^2\right)\Bigg)a_n^4+O(a_n^6)\Bigg)$$

当 $t=2$ 时，规范常数 c_n 和 d_n 取自(3)式，则对于 $\Lambda'(x)=e^{-x}\Lambda(x)$，$x\in\mathbb{R}$ 有

$$f_n(x)=\Lambda'(x)\frac{e^{-(r-1)x}}{(r-1)!}\Bigg(1+\left(\frac{1}{2}+x+x^2+(r-e^{-x}-1)\left(\frac{7}{2}+3x+x^2\right)\right)a_n^4+$$
$$\left((e^{-x}-r+1)\left(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\right)-\left(\frac{1}{3}+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3\right)\right)a_n^6+O(a_n^8)\Bigg)$$

推论 2 由定理 2 知，当 $t>0$ 时，$f_n(x)$ 收敛到 $\Lambda'(x)\frac{e^{-(r-1)x}}{(r-1)!}$ 的速度与 $\frac{1}{\log n}$ 同阶；当 $t=2$ 时，$f_n(x)$ 收敛到 $\Lambda'(x)\frac{e^{-(r-1)x}}{(r-1)!}$ 的速度与 $\frac{1}{(\log n)^2}$ 同阶.

为使得符号简化，当 $t>0$，规范常数 c_n 和 d_n 取自(2)式时，令 $(c_nx+d_n)^{\frac{1}{t}}=z_n$；当 $t=2$，规范常数 c_n 和 d_n 取自(3)式时，令 $(c_nx+d_n)^{\frac{1}{2}}=w_n$.

引理 1 对于自然数 k 及充分大的 n，

(i) $t\neq 2$ 时，

$$(n(1-\Phi(z_n)))^k=\Bigg(1-k\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)a_n^2+\Bigg(k\Bigg(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+$$
$$\frac{(t-2)^2}{8}x^4\Bigg)+\frac{k(k-1)}{2}\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)^2\Bigg)a_n^4\Bigg)e^{-kx}+O(a_n^6) \tag{4}$$

(ii) $t=2$ 时，

$$(n(1-\Phi(w_n)))^k=\left(1+k\left(\frac{7}{2}+3x+x^2\right)a_n^4-k\left(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\right)a_n^6\right)e^{-kx}+O(a_n^8)$$

证明 由文献[3]中的(3.5)式有当 $t>0$ 时，

$$1-\Phi(z_n)=n^{-1}e^{-x}\Bigg(1-\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)a_n^2+\Bigg(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+$$
$$\frac{(t-2)^2}{8}x^4\Bigg)a_n^4+O(a_n^6)\Bigg) \tag{5}$$

则对 $(n(1-\Phi(z_n)))^k$ 做泰勒展开即可证得结论. $t=2$ 时，同理可得

$$1-\Phi(w_n)=n^{-1}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\left(\frac{7}{2}+3x+x^2\right)a_n^4-\left(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\right)a_n^6+O(a_n^8)\right) \tag{6}$$

引理证毕.

引理 2 对于自然数 l 及充分大的 n 有 $\Phi^{-l}(z_n)=1+O(n^{-1})$，$\Phi^{-l}(w_n)=1+O(n^{-1})$.

证明 由(5)式可得

$$\Phi^{-l}(z_n)=\left(1-n^{-1}\mathrm{e}^{-x}\left(1-\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)a_n^2+\left(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+\frac{(t-2)^2}{8}x^4\right)a_n^4+O(a_n^6)\right)\right)^{-l}=1+O(n^{-1})$$

同理可得 $\Phi^{-l}(w_n)=1+O(n^{-1})$.

定理 1 的证明 使用类似于文献[2]的方法有当 $t>0$ 时，

$$\mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^t\leqslant c_nx+d_n)=\mathrm{P}(\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}\leqslant z_n)-\mathrm{P}(\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}\leqslant -z_n)=\Phi^n(z_n)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(n(1-\Phi(z_n)))^j}{j!}+O(n^{-1}) \tag{7}$$

由(4)式知，

$$\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(n(1-\Phi(z_n)))^j}{j!}=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}-\left(\sum_{j=0}^{r-1}j\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}\right)a_n^2+\left(\sum_{j=0}^{r-1}\left(j\left(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+\frac{(t-2)^2}{8}x^4\right)+\frac{j(j-1)}{2}\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}\right)a_n^4+O(a_n^6) \tag{8}$$

由文献[3]中的(3.6)式有

$$\Phi^n(z_n)=\Lambda(x)\left(1+\mathrm{e}^{-x}\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)a_n^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)^2-\mathrm{e}^{-x}\left(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+\frac{(t-2)^2}{8}x^4\right)\right)a_n^4+O(a_n^6)\right) \tag{9}$$

则由(7)式和(8)式知

$$\mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^t\leqslant c_nx+d_n)=\Lambda(x)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}+\frac{\mathrm{e}^{-rx}}{(r-1)!}\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)a_n^2+\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}\left(-j\mathrm{e}^{-x}+\frac{j(j-1)}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\cdot\left(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\right)^2-\frac{\mathrm{e}^{-rx}}{(r-1)!}\left(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+\frac{(t-2)^2}{8}x^4\right)\right)a_n^4+O(a_n^6)\right)$$

$t=2$ 时，由(5)式得

$$\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(n(1-\Phi(w_n)))^j}{j!}=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}+\sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{7}{2}+3x+x^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}a_n^4-\sum_{j=0}^{r-1}j\left(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\right)\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}a_n^6+O(a_n^8)$$

$$\Phi^n(w_n)=\Lambda(x)\left(1-\mathrm{e}^{-x}\left(\left(\frac{7}{2}+3x+x^2\right)a_n^4-\left(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\right)a_n^6+O(a_n^8)\right)\right) \tag{10}$$

故由(7)式知

$$\mathrm{P}(|\boldsymbol{X}_{n,n-r+1}|^2\leqslant c_nx+d_n)=\Phi^n(w_n)\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(n(1-\Phi(w_n)))^j}{j!}+O(n^{-1})=\Lambda(x)\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{e}^{-jx}}{j!}-\frac{\mathrm{e}^{-rx}}{(r-1)!}\left(\frac{7}{2}+3x+x^2\right)a_n^4+\frac{\mathrm{e}^{-rx}}{(r-1)!}\left(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\right)a_n^6\right)+O(a_n^8)$$

定理证毕.

定理 2 的证明　令 $f_n(x)=h_n(x)+g_n(x)$，其中

$$h_n(x)=\frac{c_n}{t}z_n^{1-t}\phi(z_n)\Big(\sum_{j=1}^{r-1}\binom{n}{j}((n-j)\Phi^{n-j-1}(z_n)(1-\Phi(z_n))^j-$$

$$j\Phi^{n-j}(z_n)(1-\Phi(z_n))^{j-1})+n\Phi^{n-1}(z_n)\Big)$$

$$g_n(x)=-\frac{c_n}{t}(-z_n)^{1-t}\phi(-z_n)\Big(\sum_{j=1}^{r-1}\binom{n}{j}((n-j)\Phi^{n-j-1}(-z_n)(1-\Phi(-z_n))^j-$$

$$j\Phi^{n-j}(-z_n)(1-\Phi(-z_n))^{j-1})+n\Phi^{n-1}(-z_n)\Big)=O(n^{r-2}2^{-n})$$

首先考虑 $t>0$ 时，

$$h_n(x)=\frac{c_n}{t}z_n^{1-t}\phi(z_n)\Big(\sum_{j=1}^{r-1}\Big(\frac{(n-j)}{j!}\Phi^{n-j-1}(z_n)(n(1-\Phi(z_n)))^j-\frac{n^j}{(j-1)!}\Phi^{n-j}(z_n)\cdot$$

$$(1-\Phi(z_n))^{j-1}\Big)+n\Phi^{n-1}(z_n)+O(n^{-1})\Big)=$$

$$n\frac{c_n}{t}z_n^{1-t}\phi(z_n)\Phi^n(z_n)\Big(\frac{(n(1-\Phi(z_n)))^{r-1}}{(r-1)!}+O(n^{-1})\Big)$$

由文献[3]之引理 3.3 知，$t>0$ 时，

$$n\frac{c_n}{t}z_n^{1-t}\phi(z_n)=$$

$$e^{-x}\Big(1+x\Big(1-t+\frac{2-t}{2}x\Big)a_n^2+x^2\Big(\frac{(1-t)(1-2t)}{2}+\frac{5(1-t)(t-2)}{6}x+\frac{(t-2)^2}{8}x^2\Big)a_n^4+O(a_n^6)\Big)$$

由(4)式，(9)式知此时

$$f_n(x)=\Lambda'(x)\frac{e^{-(r-1)x}}{(r-1)!}\Big(1+\Big(1+e^{-x}-r+(2-t-r+e^{-x})x+\frac{2-t}{2}(e^{-x}-r)x^2\Big)a_n^2+$$

$$\Big((r-e^{-x}-1)\Big(3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{(2-t)(2t+1)}{6}x^3+\frac{(t-2)^2}{8}x^4\Big)+$$

$$\frac{(r-1-e^{-x})^2-r+1}{2}\Big(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\Big)^2+x(e^{-x}-1)\Big(1-t+\frac{t-2}{2}x^2\Big)\cdot$$

$$\Big(1+x+\frac{2-t}{2}x^2\Big)+x^2\Big(\frac{(1-t)(1-2t)}{2}+\frac{5(1-t)(t-2)}{6}x+\frac{(t-2)^2}{8}x^2\Big)\Big)a_n^4+O(a_n^6)\Big)$$

当 $t=2$ 时，有

$$n\frac{c_n}{2}z_n^{-1}\phi(w_n)=e^{-x}\Big(1+\Big(\frac{1}{2}+x+x^2\Big)a_n^4-\Big(\frac{1}{3}+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3\Big)a_n^6+O(a_n^8)\Big)\tag{11}$$

故由(5)式及(11)式知，此时

$$f_n(x)=n\frac{c_n}{2}z_n^{-1}\phi(w_n)\Phi^n(w_n)\Big(\frac{(n(1-\Phi(w_n)))^{r-1}}{(r-1)!}+O(n^{-1})\Big)=$$

$$\Lambda'(x)\frac{e^{-(r-1)x}}{(r-1)!}\Big(1+\Big(\frac{1}{2}+x+x^2+(r-e^{-x}-1)\Big(\frac{7}{2}+3x+x^2\Big)\Big)a_n^4+$$

$$\Big((e^{-x}-r+1)\Big(\frac{43}{3}+14x+6x^2+\frac{4}{3}x^3\Big)-\Big(\frac{1}{3}+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3\Big)\Big)a_n^6+O(a_n^8)\Big)$$

参考文献：

[1]　HALL P. On the Rate of Convergence of Normal Extremes [J]. Journal of Applied Probability，1979，16(2)：433-439.

[2]　HALL P. Estimating Probabilities for Normal Extremes [J]. Advances in Applied Probability，1980，12(2)：491-500.

[3] ZHOU W, LING C X. Higher-Order Expansions of Powered Extremes of Normal Samples [J]. Statistics and Probability Letters, 2016, 111: 12-17.
[4] LIAO X, PENG Z X, NADARAJAH S, et al. Rates of Convergence of Extremes from Skew Normal Samples [J]. Statistics and Probability Letters, 2012, 84(1): 40-47.
[5] LI C Q, LI T T. Density Expansions of Extremes from General Error Distribution with Applications [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 2015(1): 1-15.
[6] 杨红艳, 彭作祥. 有限混合偏正态极值的极限分布 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(3): 59-62.
[7] 章毓波, 彭作祥. t分布的极值分布渐近展开 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(3): 67-70.

Higher-Order Expansions of Powered Order Statistics of Gaussian Sequences

FENG Fan, PENG Zuo-xiang
School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, higher-order expansions on distributions and densities of powered order statistics formed by a sequence of independent identically Gaussian distributed random variables have been established under the optimal normalized constants. A byproduct is that rates of convergence of distributions and densities of powered statistics are the same order of $\frac{1}{\log n}$, respectively.

Key words: Gaussian sequences; powered order statistics; high-order expansion; convergence rate

责任编辑 张 枸