第 44 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 4 月
Vol. 44 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.001

一类形变超 W-代数上的超双导子及超交换映射①

黄忠铣

武夷学院 数学与计算机学院,福建 武夷山 354300

摘要:设 $\widetilde{W}$ 是一类形变超 W-代数 $W_t^s(2,2)$. 首先确定 $\widetilde{W}$ 上的超斜对称双导子,证明了非内导子的存在性. 进一步得到 $\widetilde{W}$ 上的线性超交换映射是非标准的.

关 键 词:形变超 W-代数;超双导子;斜对称;超交换映射

中图分类号:**O152.5** **文献标志码**:**A** **文章编号**:1000-5471(2019)04-0001-06

在本文中,$\mathbb{Z}$ 表示整数集,$\mathbb{C}$ 表示复数域,所有的模(向量空间)都定义在 $\mathbb{C}$ 上.

令 L 是结合代数,若映射 ψ: $L \longrightarrow L$ 满足 $\psi(x)x = x\psi(x)(\forall x \in L)$,则称 ψ 是交换的. 结合代数上的交换映射理论有较长的历史,具有丰富的结果,应用于如李代数等许多领域. 记

$$[x, y] = xy - yx \qquad \forall x, y \in L$$

李代数上的交换映射 ψ 也可定义为 $[\psi(x), x] = 0(\forall x \in L)$[1-2]. 将交换映射推广到李超代数上,分成标准和非标准的[3-4]. 如超 Virasoro 代数上的所有线性超交换映射是标准的[3].

在研究顶点算子代数时产生的 W-代数 $W(2,2)$,在物理理论以及数学的许多领域起重要作用[5],其作为复数域上的向量空间,有基 $\{L_m, I_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$,并满足如下李括号:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \qquad [L_m, I_n] = (m-n)I_{m+n} \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

已有许多关于 $W(2,2)$ 的结构与表示的研究成果[5-10]. 形变超 W-代数 $W_t^s(2,2)$[11](下面简记为 $\widetilde{W}$)的偶部分是 $W(2,2)$. $\widetilde{W}$ 是复数域上的向量空间,其基 $\{L_m, I_m, G_p, H_p \mid m \in \mathbb{Z}, p \in s+\mathbb{Z}\}$ 满足如下关系式(未出现的为 0):

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \qquad [L_m, I_n] = (m-n)I_{m+n}$$

$$[L_m, H_p] = \left(\frac{m}{2} - p\right)H_{m+p} \qquad [G_p, G_q] = I_{p+q}$$

$$[L_m, G_p] = \left(\frac{m}{2} - p\right)G_{p+m} + t(m+1)H_{m+p} \qquad [I_m, G_p] = (m-2p)H_{p+m}$$

其中 $s = 0, \frac{1}{2}$, $t \in \mathbb{C}$.

双导子是研究结合代数或李代数上交换映射的有效工具[12-13]. 对于结合超代数和李超代数,超双导子起同样重要的作用[3-4,14]. 超双导子分为内导子和非内导子,如超 Virasoro 代数上的所有超双导子是超双内导子[3]. 注意到对 L 中的齐次元 x, y,有 $|\varphi(x, y)| = |x| + |y|$.

本文考虑 $\widetilde{W}$ 上的超双导子和超交换映射. 证明 $\widetilde{W}$ 上的超斜对称超双导子存在非内导子. 基于此结果,得到此代数上的线性超交换映射是非标准的. 这个结果有别于文献[3,14].

① 收稿日期:2018-05-14
基金项目:福建省教育厅科技项目(JB14107);福建省中青年教师教育科研项目(JT180599).
作者简介:黄忠铣(1973-),女,副教授,主要从事李代数的研究.

引理 1 $\forall L_m, L_n \in \widetilde{W}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, 存在 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, 使得

$$\varphi(L_m, L_n) = \lambda_1(m-n)L_{m+n} + \lambda_2(m-n)I_{m+n} = \lambda_1[L_m, L_n] + \lambda_2(m-n)I_{m+n}$$

证 因为 $|\varphi(L_m, L_n)| = |L_m| + |L_n| = \bar{0}$, 所以可设

$$\varphi(L_m, L_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha^{(1)} L_\alpha + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} b_\beta^{(1)} I_\beta$$

其中 $a_\alpha^{(1)} \in \mathbb{C}$, $b_\beta^{(1)} \in \mathbb{C}$.

当 $m = n$ 时, $[L_m, L_n] = 0$, 由文献[3]中引理 2.2 得 $\varphi(L_m, L_n) \in Z(\widetilde{W}) = 0$. 下设 $m \neq n$, 由文献[3]中引理 2.2 有

$$\frac{1}{m-n}[\varphi(L_m, L_n), [L_m, L_n]] = 0$$

因此

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha^{(1)}(\alpha - m - n)L_{\alpha+m+n} + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} b_\beta^{(1)}(\beta - m - n)I_{\beta+m+n} = 0$$

从而:

$$a_\alpha^{(1)}(\alpha - m - n) = 0 \qquad b_\beta^{(1)}(\beta - m - n) = 0$$

所以当 $\alpha \neq m+n$ 时, $a_\alpha^{(1)} = 0$; 当 $\beta \neq m+n$ 时, $b_\beta^{(1)} = 0$. 故

$$\varphi(L_m, L_n) = a_{m+n}^{(1)} L_{m+n} + b_{m+n}^{(1)} I_{m+n}$$

由文献[3]中引理 2.1 有

$$[\varphi(L_m, L_n), [L_k, L_0]] = [[L_m, L_n], \varphi(L_k, L_0)] \qquad k \in \mathbb{Z}$$

可得

$$ka_{m+n}^{(1)}(m+n-k)L_{m+n+k} + kb_{m+n}^{(1)}(m+n-k)I_{m+n+k} = (m-n)a_k^{(1)}(m+n-k)L_{m+n+k} + (m-n)b_k^{(1)}(m+n-k)I_{m+n+k}$$

由 k 的任意性, 从而:

$$ka_{m+n}^{(1)} = (m-n)a_k^{(1)} \qquad kb_{m+n}^{(1)} = (m-n)b_k^{(1)}$$

因此:

$$a_{m+n}^{(1)} = (m-n)a_1^{(1)} \qquad b_{m+n}^{(1)} = (m-n)b_1^{(1)}$$

分别令 $a_1^{(1)} = \lambda_1$, $b_1^{(1)} = \lambda_2$, 引理 1 得证.

引理 2 $\forall L_m, I_n \in \widetilde{W}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, 则 $\varphi(L_m, I_n) = \lambda_1(m-n)I_{m+n} = \lambda_1[L_m, I_n]$.

证 因为 $|\varphi(L_m, I_n)| = |L_m| + |I_n| = \bar{0}$, 所以可设

$$\varphi(L_m, I_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha^{(2)} L_\alpha + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} b_\beta^{(2)} I_\beta$$

其中 $a_\alpha^{(2)} \in \mathbb{C}$, $b_\beta^{(2)} \in \mathbb{C}$.

当 $m = n$ 时, $[L_m, I_n] = 0$, 从而 $\varphi(L_m, I_n) \in Z(\widetilde{W}) = 0$. 下设 $m \neq n$, 由

$$\frac{1}{m-n}[\varphi(L_m, I_n), [L_m, I_n]] = 0$$

因此

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha^{(2)}(m-n)(\alpha - m - n)I_{\alpha+m+n} = 0$$

从而当 $\alpha \neq m+n$ 时, $a_\alpha^{(2)} = 0$. 故 $\varphi(L_m, I_n) = a_{m+n}^{(2)} L_{m+n} + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} b_\beta^{(2)} I_\beta$.

又由

$$[\varphi(L_m, I_n), [L_k, L_0]] = [[L_m, I_n], \varphi(L_k, L_0)] \qquad k \in \mathbb{Z}$$

可得

$$ka_{m+n}^{(2)}(m+n-k)L_{m+n+k} + k\sum_{\beta \in \mathbb{Z}} b_\beta^{(2)}(\beta - k)I_{\beta+k} = k\lambda_1(m-n)(m+n-k)I_{m+n+k}$$

因此 $a_{m+n}^{(2)} = 0$, 且当 $\beta \neq m+n$ 时, $b_\beta^{(2)} = 0$. 由 k 的任意性, 从而 $b_{m+n}^{(2)} = \lambda_1(m-n)$. 引理 2 得证.

引理 3 $\forall G_r, G_s \in \widetilde{W}$, $r, s \in \mathbb{Z}$ 或 $r, s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, 则 $\varphi(G_r, G_s) = \lambda_1 I_{r+s} = \lambda_1[G_r, G_s]$.

证　因为 $|\varphi(G_r, G_s)| = |G_r| + |G_s| = \bar{0}$，所以可设

$$\varphi(G_r, G_s) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha^{(3)} L_\alpha + \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} b_\beta^{(3)} I_\beta$$

其中 $a_\alpha^{(3)} \in \mathbb{C}$，$b_\beta^{(3)} \in \mathbb{C}$. 由 $[\varphi(G_r, G_s), [G_r, G_s]] = 0$，因此

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha^{(3)} (\alpha - r - s) I_{\alpha+r+s} = 0$$

从而当 $\alpha \neq r + s$ 时，$a_\alpha^{(3)} = 0$. 故 $\varphi(G_r, G_s) = a_{r+s}^{(3)} L_{r+s} + \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} b_\beta^{(2)} I_\beta$.

又由

$$[\varphi(G_r, G_s), [L_k, L_0]] = [[G_r, G_s], \varphi(L_k, L_0)] \qquad k \in \mathbb{Z}$$

可得

$$k a_{r+s}^{(3)} (r + s - k) L_{r+s+k} + k \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} b_\beta^{(3)} (\beta - k) I_{\beta+k} = k\lambda_1 (r + s - k) I_{r+s+k}$$

因此 $a_{r+s}^{(3)} = 0$，且当 $\beta \neq r + s$ 时，$b_\beta^{(3)} = 0$. 由 k 的任意性，从而 $b_{r+s}^{(3)} = \lambda_1$. 所以 $\varphi(G_r, G_s) = \lambda_1 I_{r+s}$.

引理 4　$\forall L_m, H_p \in \widetilde{W}$，$m \in \mathbb{Z}$，$p \in \mathbb{Z}$ 或 $p \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$，则 $\varphi(L_m, H_p) = \lambda_1 \left(\frac{m}{2} - p\right) H_{m+p} = \lambda_1 [L_m, H_p]$.

证　因为 $|\varphi(L_m, H_p)| = |L_m| + |H_p| = \bar{1}$，所以可设

$$\varphi(L_m, H_p) = \sum_{\alpha\in\frac{\varepsilon}{2}+\mathbb{Z}} a_\alpha^{(4)} G_\alpha + \sum_{\beta\in\frac{\varepsilon}{2}+\mathbb{Z}} b_\beta^{(4)} H_\beta$$

其中 $a_\alpha^{(4)} \in \mathbb{C}$，$b_\beta^{(4)} \in \mathbb{C}$.

当 $\varepsilon = 0$ 时，由

$$[\varphi(L_m, H_p), [L_1, L_0]] = [[L_m, H_p], \varphi(L_1, L_0)]$$

可得

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha^{(4)} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) G_{\alpha+1} - 2\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha^{(4)} t H_{\alpha+1} + \sum_{\beta\in\mathbb{Z}} b_\beta^{(4)} \left(\beta - \frac{1}{2}\right) H_{\beta+1} = \lambda_1 \left(\frac{m}{2} - p\right)\left(m + p - \frac{1}{2}\right) H_{m+p+1}$$

因此 $a_\alpha^{(4)} = 0$，且当 $\beta \neq m + p$ 时，$b_\beta^{(4)} = 0$，$b_{m+p}^{(4)} = \lambda_1 \left(\frac{m}{2} - p\right)$. 所以

$$\varphi(L_m, H_p) = \lambda_1 (\frac{m}{2} - p) H_{m+p}$$

当 $\varepsilon = 1$ 时，由

$$[\varphi(L_m, H_p), [L_2, L_0]] = [[L_m, H_p], \varphi(L_2, L_0)]$$

可得

$$2\sum_{\alpha\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} a_\alpha^{(4)} (\alpha - 1) G_{\alpha+2} - 6\sum_{\alpha\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} a_\alpha^{(4)} t H_{\alpha+2} + 2\sum_{\beta\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b_\beta^{(4)} (\beta - 1) H_{\beta+2} = \lambda_1 (m - 2p)(m + p - 1) H_{m+p+2}$$

因此 $a_\alpha^{(4)} = 0$，且当 $\beta \neq m + p$ 时，$b_\beta^{(4)} = 0$，$b_{m+p}^{(4)} = \lambda_1 \left(\frac{m}{2} - p\right)$. 所以

$$\varphi(L_m, H_p) = \lambda_1 \left(\frac{m}{2} - p\right) H_{m+p}$$

引理 5　$\forall L_m, G_r \in \widetilde{W}$，$m \in \mathbb{Z}$，$r \in \mathbb{Z}$ 或 $r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$，则

$$\varphi(L_m, G_r) = \lambda_1 \left(\frac{m}{2} - r\right) G_{m+r} + \lambda_2 (m - 2r) H_{m+r} + \lambda_1 t (m + 1) H_{m+r} = \lambda_1 [L_m, G_r] + \lambda_2 (m - 2r) H_{m+r}$$

证　因为 $|\varphi(L_m, G_r)| = |L_m| + |G_r| = \bar{1}$，所以可设

$$\varphi(L_m, G_r) = \sum_{\alpha\in\frac{\varepsilon}{2}+\mathbb{Z}} a_\alpha^{(5)} G_\alpha + \sum_{\beta\in\frac{\varepsilon}{2}+\mathbb{Z}} b_\beta^{(5)} H_\beta$$

其中 $a_\alpha^{(5)} \in \mathbb{C}$，$b_\beta^{(5)} \in \mathbb{C}$.

当 $\varepsilon = 0$ 时，由

$$[\varphi(L_m, G_r), [L_1, L_0]] = [[L_m, G_r], \varphi(L_1, L_0)]$$

可得

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha^{(5)}\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)G_{\alpha+1}-2tH_{\alpha+1}\right]+\sum_{\beta\in\mathbb{Z}} b_\beta^{(5)}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)H_{\beta+1}=$$

$$\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)\left[\left(m+r-\frac{1}{2}\right)G_{m+r+1}-2tH_{m+r+1}\right]+\lambda_2\left(\frac{m}{2}-r\right)(2m+2r-1)H_{m+n+1}+t\lambda_1(m+1)\left(m+r-\frac{1}{2}\right)H_{m+r+1}$$

所以：

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha^{(5)}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)G_{\alpha+1}=$$

$$\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)\left(m+r-\frac{1}{2}\right)G_{m+r+1}$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} a_\alpha^{(5)}(-2t)H_{\alpha+1}+\sum_{\beta\in\mathbb{Z}} b_\beta^{(5)}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)H_{\beta+1}=$$

$$\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)(-2t)H_{m+r+1}+\lambda_2\left(\frac{m}{2}-r\right)(2m+2r-1)H_{m+n+1}+t\lambda_1(m+1)\left(m+r-\frac{1}{2}\right)H_{m+r+1} \tag{1}$$

因此当 $\alpha\neq m+r$ 时，$a_\alpha^{(5)}=0$，$a_{m+r}^{(5)}=\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)$. 代入(1)式，则当 $\beta\neq m+r$ 时，$b_\beta^{(5)}=0$，且

$$b_{m+r}^{(5)}\left(m+r-\frac{1}{2}\right)=\lambda_2\left(\frac{m}{2}-r\right)(2m+2r-1)+t\lambda_1(m+1)\left(m+r-\frac{1}{2}\right)$$

即 $b_{m+r}^{(5)}=\lambda_2(m-2r)+\lambda_1 t(m+1)$. 所以

$$\varphi(L_m, G_r)=\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)G_{m+r}+\lambda_2(m-2r)H_{m+r}+\lambda_1 t(m+1)H_{m+r}=\lambda_1[L_m, G_r]+\lambda_2(m-2r)H_{m+r}$$

当 $\varepsilon=1$ 时，由

$$[\varphi(L_m, H_p), [L_2, L_0]] = [[L_m, H_p], \varphi(L_2, L_0)]$$

可得

$$\sum_{\alpha\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} a_\alpha^{(5)}[(\alpha-1)G_{\alpha+2}-3tH_{\alpha+2}]+\sum_{\beta\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b_\beta^{(5)}(\beta-1)H_{\beta+2}=$$

$$\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)[(m+r-1)G_{m+r+2}-3tH_{m+r+2}]+\lambda_2\left(\frac{m}{2}-r\right)(2m+2r-2)H_{m+n+2}+t\lambda_1(m+1)(m+r-1)H_{m+r+2}$$

所以：

$$\sum_{\alpha\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} a_\alpha^{(5)}(\alpha-1)G_{\alpha+2}=$$

$$\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)(m+r-1)G_{m+r+2} \tag{2}$$

$$\sum_{\alpha\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} a_\alpha^{(5)}(-3t)H_{\alpha+2}+\sum_{\beta\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} b_\beta^{(5)}(\beta-1)H_{\beta+2}=$$

$$\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)(-3t)H_{m+r+2}+\lambda_2\left(\frac{m}{2}-r\right)(2m+2r-2)H_{m+n+2}+t\lambda_1(m+1)(m+r-1)H_{m+r+2} \tag{3}$$

因此当 $\alpha\neq m+r$ 时，$a_\alpha^{(5)}=0$，$a_{m+r}^{(5)}=\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)$. 代入(3)式，则当 $\beta\neq m+r$ 时，$b_\beta^{(5)}=0$，且

$$b_{m+r}^{(5)}(m+r-1)=\lambda_2\left(\frac{m}{2}-r\right)(2m+2r-2)+t\lambda_1(m+1)(m+r-1)$$

即 $b_{m+r}^{(5)}=\lambda_2(m-2r)+\lambda_1 t(m+1)$. 所以

$$\varphi(L_m, G_r)=\lambda_1\left(\frac{m}{2}-r\right)G_{m+r}+\lambda_2(m-2r)H_{m+r}+\lambda_1 t(m+1)H_{m+r}=\lambda_1[L_m, G_r]+\lambda_2(m-2r)H_{m+r}$$

引理 6 $\forall I_m, G_r\in\widetilde{W}$，$m\in\mathbb{Z}$，$r\in\mathbb{Z}$ 或 $r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$，则 $\varphi(I_m, G_r)=\lambda_1(m-2r)H_{m+r}=\lambda_1[I_m, G_r]$.

证明过程类似于引理 4.

定理 1　如果 φ 是 $\widetilde{W}$ 上的超斜对称超双导子，则 φ 有如下形式：

$$\varphi(x,\ y)=\lambda_1[x,\ y]+\lambda_2\varphi_0(x,\ y)\qquad x,y\in\widetilde{W}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$，$\varphi_0$ 是 $\widetilde{W}$ 上的双线性映射.

证　构造 $\widetilde{W}$ 上的双线性映射 φ_0，满足如下条件：

$$\begin{aligned}\varphi_0:\ \widetilde{W}\times\widetilde{W}&\longrightarrow\widetilde{W}\\(L_m,\ L_n)&\longmapsto(m-n)I_{m+n}\\(L_m,\ G_r)&\longmapsto(m-2r)H_{m+r}\\(x,\ y)&\longmapsto 0\end{aligned}$$

其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$r\in\frac{\varepsilon}{2}+\mathbb{Z}$，$\varepsilon=0,1$，$(x,\ y)$ 是除了 $(L_m,\ L_n)$ 和 $(L_m,\ G_r)$ 的其它基对.

易证 φ_0 是 $\widetilde{W}$ 上的非内导子. 若 $[x,\ y]=0$，则由文献[3] 的引理 2.2 及 φ_0 的定义可得结论. 若 $[x,\ y]\neq 0$，则由引理 1－6，可得结论.

定理 2　设 ψ 是 $\widetilde{W}$ 上的超交换映射，则 ψ 有如下形式

$$\psi(x)=\lambda\psi_0(x)\qquad\forall\, x\in\widetilde{W}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{C}$，ψ_0 是 $\widetilde{W}$ 上的线性映射. 从而 $\widetilde{W}$ 上的线性超交换映射是非标准的.

证　设 ψ 是 $\widetilde{W}$ 上的线性超交换映射. 定义 φ：$G\times G\longrightarrow G$，$\varphi(x,\ y)\longmapsto[\psi(x),\ y](x,y\in G)$. 注意到 φ 保持 G 上的 Z_2 -阶，而且

$$\varphi(x,\ [y,\ z])=[\varphi(x,\ y),\ z]+(-1)^{|x||y|}[y,\ \varphi(x,\ z)]\qquad x,y,z\in G$$

即 φ 相对第二个元素是超导子. 因为 ψ 是线性超交换映射，所以 $[\psi(x),\ y]=(-1)^{|x||y|}[x,\ \psi(y)]$，因此 φ 相对第一个元素也是超导子. 所以 φ 是 $\widetilde{W}$ 上的超双导子. 又由 φ 的定义，它是超斜对称的. 这样，φ 是 $\widetilde{W}$ 上的超斜对称的超双导子. 由定理 1，存在 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$，使得

$$\varphi(x,\ y)=\lambda_1[x,\ y]+\lambda_2\varphi_0(x,\ y)\qquad x,y\in\widetilde{W}$$

由 φ 的定义，因此

$$[\psi(x)-\lambda_1x,\ y]=\lambda_2\varphi_0(x,\ y)\qquad x,y\in\widetilde{W}\tag{4}$$

引入 $\widetilde{W}$ 上的辅助线性映射 ψ_0，满足如下条件：

$$\begin{aligned}\psi_0:\ \widetilde{W}&\longrightarrow\widetilde{W}\\L_m&\longmapsto I_m\\x&\longmapsto 0\end{aligned}$$

其中 $m\in\mathbb{Z}$，x 是异于 L_m 的基. 从而

$$\varphi_0(x,\ y)=[\psi_0(x),\ y]\qquad x,y\in\widetilde{W}$$

由(4) 式有

$$[\psi(x)-\lambda_1x-\lambda_2\psi_0(x),\ y]=0\qquad x,y\in\widetilde{W}$$

因为 $\widetilde{W}$ 无中心，所以

$$\psi(x)=\lambda_1x+\lambda_2\psi_0(x)\qquad x\in\widetilde{W}\tag{5}$$

进一步地，在(5) 式中取 $x=G_r$，由 $[\psi(G_r),\ G_r]=0$，可得 $\lambda_1=0$. 记 λ_2 为 λ，从而定理 2 得证.

参考文献：

[1]　WANG D Y，YU X X. Biderivations and Linear Commuting Maps on the Schrödinger-Virasoro Lie Algebra [J]. Communications in Algebra，2013，41(6)：2166-2173.

[2]　HAN X，WANG D Y，XIA C G. Linear Commuting Maps and Biderivations on the Lie Algebra $W(a,\ b)$ [J]. J Lie Theory，2016，26：777-786.

[3]　XIA C G，WANG D Y，HAN X. Linear Super-Commuting Maps and Super-Biderivations on the Super-Virasoro Algebras [J]. Communications in Algebra，2016，44(12)：5342-5350.

[4]　FAN G，DAI X. Super-Biderivations of Lie Superalgebras [J]. Linear and Multilinear algebra，2017，65：58-66.

[5] ZHANG W, DONG C. W-Algebra $W(2, 2)$ and the Vertex Operator Algebra $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)\otimes L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ [J]. Commun Math Phys, 2008, 285(3): 991-1004.

[6] CHEN H J, LI J B. Left-Symmetric Algebra Structures on the W-Algebra $W(2, 2)$ [J]. Linear Algebra Appl, 2012, 437(2): 1821-1834.

[7] JIANG W, PEI Y. On the Structure of Verma Modules Over the W-Algebra $W(2, 2)$ [J]. J Math Phys, 2010, 51: 1-8.

[8] LIU D, GAO S L, ZHU L S. Classification of Irreducible Weight Modules Over W-Algebra $W(2, 2)$ [J]. J Math Phys, 2008, 49: 1—6.

[9] LI J B, SU Y C, XIN B. Lie Bialgebras of a Family of Lie Algebras of Block Type [J]. Chinese Annals of Mathematics (Ser B), 2008, 29(5): 487-500.

[10] ZHANG X F, TAN S B. θ-Unitary Representations for the W-Algebra $W(2, 2)$ [J]. Linear Multilinear Alg, 2012, 60(5): 533-543.

[11] WANG Y, CHEN Z Q, BAI C M. Classification of Balinsky-Novikov Superalgebras with Dimension $2|2$ [J]. J Phys(A), 2012, 45(10): 201—225.

[12] CHEN Z X. Biderivations and Linear Commuting Maps on Simple Generalized Witt Algebras Over a Field [J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2016, 31(1): 1-12.

[13] TANG X M, ZHONG Y. Biderivations of the Planar Galilean Conformal Algebra and Their Applications [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2018, 67(3): 1-11.

[14] CHENG X, SUN J C. Super-Biderivations and Linear Super-Commuting Maps on the $N=2$ Superconformal Algebra [J]. Mathematics and Statistics, 2018, 48(4): 1-13.

Super-Biderivations and Super-Commuting Maps on a Class of Deformative Super *W*-Algebras

HUANG Zhong-xian

School of Mathematics and Computer, Wuyi University, Wuyishan Fujian 354300, China

Abstract: In this paper, we first determine all the super-skewsymmetric super-biderivations of a class of deformative super W-algebras $W_t^S(2, 2)$. We have proved that there exist non-inner super-biderivations of the algebras. Based on the result of super-biderivations, the result shows that every linear super-commuting maps on the algebras are non-standard.

Key words: deformative super W-algebras; super-biderivation; skew-symmetric; super-commuting map

责任编辑 廖 坤