第 44 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 4 月
Vol. 44 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.003

一类带 Neumann 边界条件的 Kirchhoff 型方程解的多重性①

王守财， 赵仕海， 熊宗洪， 储昌木

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要： 利用山路引理和极小化理论，研究一类带 Neumann 边界条件的 Kirchhoff 型方程，获得了该方程非平凡解的多重性.

关 键 词： Kirchhoff 型方程；Neumann 边界；山路引理；极小化理论

中图分类号：O175.25 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000－5471(2019)04－0011－05

考虑如下带 Neumann 边界条件的 Kirchhoff 型方程：

$$
\begin{cases} -\left(1+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u+\beta(x)u=-\lambda|u|^{q-2}u+f(x,u) & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}
$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^{N}$ 是有界光滑区域；n 为外法向的单位向量；$b>0$，$1<q<2$，$\lambda>0$ 为参数；$\beta(x)\in L^{s}(\Omega)$，$s>\dfrac{N}{2}$；$f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件.

当 $b=0$ 时，方程(1) 为一类带 Neumann 边界条件的半线性椭圆方程，文献[1] 利用临界点理论和 Morse 理论获得了在 $\lambda=0$ 的情形下该类方程非平凡解的多重性，文献[2] 利用变分原理、截断和扰动技术及临界群理论获得了在 $\lambda>0$ 的情形下该类方程的多重解.

当 $\beta(x)\equiv 0$ 时，方程(1) 为一类经典的 Kirchhoff 型方程，文献[3] 利用山路引理和极小化理论获得了该方程至少存在 3 个非平凡解，文献[4] 应用极小极大原理研究了该类方程在 $\lambda=0$ 时的多重变号解. 关于 Dirichlet 边值条件，许多学者也获得了该类方程非平凡解的存在性和多重性(见文献[5－10]).

记：

$$
\|u\|=\left(\int_{\Omega}(|\nabla u|^{2}+u^{2})\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\|u\|_{p}=\left(\int_{\Omega}|u|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p\geqslant 1
$$

定义 τ：$H^{1}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$，且对 $\forall\, u\in H^{1}(\Omega)$，有

① 收稿日期：2018－07－08
基金项目：国家自然科学基金项目(11661021)；贵州省教育厅创新群体重大项目(KY[2016]029)；贵州省科技厅联合基金项目(黔科合 J 字 LKM[2013]35 号).
作者简介：王守财(1979－)，男，讲师，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：储昌木，教授.

$$\tau(u)=\|\nabla u\|_2^2+\int_\Omega \beta(x)u^2\mathrm{d}x$$

显然，$\tau\in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$.

由文献[2]知，对 $\forall u\in H^1(\Omega)$，存在 $\hat{c}\in(0,1)$，$\gamma>0$，使得

$$\hat{c}\|u\|^2\leqslant\tau(u)+\gamma\|u\|_2^2 \tag{2}$$

由文献[11]知，方程(1)对应的特征值序列为$\{\hat{\lambda}_k\}_{k\geqslant 1}$，且当 $k\to+\infty$ 时，$\hat{\lambda}_k\to+\infty$. 特别地，

$$\hat{\lambda}_1=\inf\left[\frac{\tau(u)}{\|u\|_2^2}:u\in H^1(\Omega),u\neq 0\right]$$

记 $\hat{u}_1$ 是 $\hat{\lambda}_1$ 对应的满足且正的特征函数，$\left\|\hat{u}_1\right\|_2=1$. 方程(1)对应的泛函为

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\tau(u)+\frac{b}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{\lambda}{q}\|u\|_q^q-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \tag{3}$$

其中

$$F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$$

显然，$I_\lambda\in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$，且对 $\forall\varphi\in H^1(\Omega)$，有

$$(I'_\lambda(u),\varphi)=\left(1+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\nabla u\,\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega\beta(x)u\varphi\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|u|^{q-2}u\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)\varphi\mathrm{d}x$$

设 $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{R}^1$ 是 Carathéodory 函数，对 $\forall x\in\Omega$，$f(x,0)=0$. 进一步假设：

(F_0) $\beta(x)\in L^s(\Omega)$，$s>\frac{N}{2}$；

(F_1) 对 $\forall(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$，存在 $a(x)\in L^\infty(\Omega)_+$，使得

$$|f(x,t)|\leqslant a(x)(1+|t|)$$

(F_2) 存在 $v(x)\in L^\infty(\Omega)$ 满足 $v(x)\leqslant\hat{\lambda}_1$，且 $\forall x\in\Omega$，

$$v(x)\neq\hat{\lambda}_1 \qquad \limsup_{u\to\pm\infty}\frac{2F(x,u)}{u^2}\leqslant v(x)$$

(F_3) 存在 $\eta_0,\hat{\eta}_0\in L^\infty(\Omega)$，使得 $\hat{\lambda}_1\leqslant\eta_0(x)$ 在 Ω 上几乎处处成立，$\eta_0(x)\neq\hat{\lambda}_1$，且对 $\forall x\in\Omega$，有

$$\eta_0(x)\leqslant\liminf_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u}\leqslant\limsup_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u}\leqslant\hat{\eta}_0(x)$$

引理 1[11] 假设 $v(x)\in L^\infty(\Omega)$，使得 $v(x)\leqslant\hat{\lambda}_1$ 在 Ω 上几乎处处成立，且 $v(x)\neq\hat{\lambda}_1$，则存在 $c_0>0$，使得对 $\forall u\in H^1(\Omega)$，有

$$\tau(u)-\int_\Omega v(x)u^2\mathrm{d}x\geqslant c_0\|u\|^2$$

引理 2 假设(F_0)，(F_1)，(F_2)成立，则当 $\lambda>0$ 时，泛函 I_λ 是强制的.

证 由(F_1)和(F_2)知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $c_\varepsilon>0$，使得对 $\forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}$，有

$$F(x,u)\leqslant\frac{1}{2}(v(x)+\varepsilon)u^2+c_\varepsilon \tag{4}$$

由(3)式和(4)式知，对 $\forall u\in H^1(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)\geqslant&\frac{1}{2}\tau(u)+\frac{b}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{\lambda}{q}\|u\|_q^q-\frac{1}{2}\int_\Omega v(x)u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega\varepsilon u^2\mathrm{d}x-\int_\Omega c_\varepsilon\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{2}\left(\tau(u)-\int_\Omega v(x)u^2\mathrm{d}x\right)-\frac{1}{2}\varepsilon\|u\|_2^2-c_\varepsilon|\Omega|\end{aligned}$$

由引理 1 及 $H^1(\Omega)$ 中范数的性质，有

$$I_\lambda(u) \geqslant \frac{1}{2}c_0 \|u\|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon \|u\|^2 - c_\varepsilon |\Omega| = \frac{c_0-\varepsilon}{2}\|u\|^2 - c_\varepsilon |\Omega|$$

取 $\varepsilon \in (0, c_0)$，可得当 $\|u\| \to +\infty$ 时，$I_\lambda(u) \to +\infty$. 故 I_λ 是强制的.

引理 3　假设(F_0),(F_1)成立，则当 $\lambda > 0$ 时，泛函 I_λ 在 $H^1(\Omega)$ 中满足(PS)条件.

证　对任一实数 c，令$\{u_n\}$为 $H^1(\Omega)$ 中的$(\mathrm{PS})_c$ 序列，且当 $n \to \infty$ 时，

$$I_\lambda(u_n) \to c \qquad I'_\lambda(u_n) \to 0 \tag{5}$$

由引理 2 知，$\{u_n\}$在 $H^1(\Omega)$ 中有界. 因此，存在$\{u_n\}$的子列(仍记为$\{u_n\}$)与 $u \in H^1(\Omega)$，使得$\{u_n\}$在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于 u，在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u，且在 Ω 上几乎处处收敛于 u. 由(2)－(5)式知

$$\begin{aligned}
&(I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u), u_n - u) \geqslant \\
&\tau(u_n-u) + b\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\int_\Omega \nabla u \, \nabla(u_n-u)\mathrm{d}x + \\
&\lambda\int_\Omega (|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x - \int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x \geqslant \\
&\hat{c}\|u_n-u\|^2 - \gamma\|u_n-u\|_2^2 + b\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\int_\Omega \nabla u \, \nabla(u_n-u)\mathrm{d}x + \\
&\lambda\int_\Omega (|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x - \int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{6}$$

由(F_1)和 Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant \\
&|a(x)|_{L^\infty} \left(\int_\Omega (|u_n|+|u|+2)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_n-u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&|a(x)|_{L^\infty} \|(|u_n|+|u|+2)\|_2 \|(u_n-u)\|_2
\end{aligned}$$

由$\{u_n\}$在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u 知，当 $n \to \infty$ 时，$\|u_n - u\|_2 \to 0$. 因此，当 $n \to \infty$ 时，有：

$$\int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0$$

$$\lambda\int_\Omega (|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0 \tag{7}$$

由(5)式知，当 $n \to \infty$ 时，有

$$(I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u), u_n - u) \to 0 \tag{8}$$

因为$\{u_n\}$在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于 u，且$\{u_n\}$有界，所以当 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0 \tag{9}$$

由(5)－(9)式知，当 $n \to \infty$ 时，$\|u_n - u\| \to 0$. 故 I_λ 在 $H^1(\Omega)$ 中满足(PS)条件.

引理 4　假设(F_0),(F_1),(F_3)成立，则存在 $\lambda_0 > 0$，$t_1 > 0$，使得当 $\lambda \in (0, \lambda_0)$ 时，$I_\lambda(t_1\hat{u}_1) < 0$.

证　由(F_1),(F_3)知，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $c_1 > 0$，$r > 2$，使得对 $\forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$，有

$$F(x,u) \geqslant \frac{1}{2}(\eta_0(x)-\varepsilon)u^2 - c_1|u|^r$$

当 $t \neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
I_\lambda(t\hat{u}_1) = &\frac{t^2}{2}\tau(\hat{u}_1) + \frac{bt^4}{4}\left(\int_\Omega |\nabla\hat{u}_1|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \frac{\lambda|t|^q}{q}\|\hat{u}_1\|_q^q - \int_\Omega F(x, t\hat{u}_1)\mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{t^2}{2}\tau(\hat{u}_1) + \frac{bt^4}{4}\left(\int_\Omega |\nabla\hat{u}_1|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \frac{\lambda|t|^q}{q}\|\hat{u}_1\|_q^q - \frac{t^2}{2}\int_\Omega (\eta_0(x)-\varepsilon)\hat{u}_1^2 \mathrm{d}x + c_1 t^r \int_\Omega \hat{u}_1^r \mathrm{d}x = \\
&\frac{t^2}{2}\left(\int_\Omega (\hat{\lambda}_1 - \eta_0(x))\hat{u}_1^{\,2}\mathrm{d}x + \varepsilon\right) + \frac{bt^4}{4}\|\nabla\hat{u}_1\|_2^4 + \frac{\lambda|t|^q}{q}\|\hat{u}_1\|_q^q + c_1 t^r\|\hat{u}_1\|_r^r
\end{aligned}$$

由 $\hat{u}_1>0$，(F_3) 和 $H^1(\Omega)$ 中范数的性质知

$$\varepsilon^*=\int_\Omega(\eta_0-\hat{\lambda}_1\hat{u}_1)\mathrm{d}x>0$$

取 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*)$，则存在 $c_2, c_3>0$，使得

$$I_\lambda(t\hat{u}_1)\leqslant -c_2t^2+c_3\,|t|^r+c_3\frac{\lambda\,|t|^q}{q}+\frac{b}{4}t^4\ \|\hat{u}_1\|^4$$

由 $r>2$ 知，存在 $\lambda_0>0$，$t_1>0$，使得当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 时，$I_\lambda(t_1\hat{u}_1)<0$.

引理 5 假设(F_0),(F_1),(F_3) 成立，则当 $\lambda>0$ 时，$u=0$ 是 I_λ 的局部极小点.

证 由(F_1),(F_3) 知，存在 $c_4>0$，使得对 $\forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}$，有

$$F(x,u)\leqslant c_4u^2$$

对 $\forall u\in H^1(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)=&\frac{1}{2}\tau(u)+\frac{b}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{\lambda}{q}\ \|u\|_q^q-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{2}(\hat{c}\ \|u\|^2-\gamma\ \|u\|_2^2)+\frac{\lambda}{q}\ \|u\|_q^q-c_4\ \|u\|_2^2\geqslant\\&\frac{\lambda}{q}\ \|u\|_q^q-c_5\ \|u\|_2^2\geqslant\\&\int_\Omega\left(\frac{\lambda}{q}u^q-c_5u^2\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $c_5=c_4+\dfrac{\gamma}{2}>0$. 当$\dfrac{\lambda u^{q-2}}{q}\geqslant c_5$，即 $u\leqslant\left(\dfrac{\lambda}{qc_5}\right)^{\frac{1}{2-q}}$ 时，有

$$I_\lambda(u)\geqslant\int_\Omega\left(\frac{\lambda}{q}u^{q-2}-c_5\right)u^2\mathrm{d}x\geqslant 0$$

所以 $u=0$ 是 I_λ 在 $C^1(\Omega)$ 中的局部极小点. 由文献[12] 知，$u=0$ 是 I_λ 在 $H^1(\Omega)$ 中的局部极小点.

定理 1 假设$(\mathrm{F}_0)-(\mathrm{F}_3)$ 成立，则存在 $\lambda_0>0$，使得当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 时，方程(1) 在 $H^1(\Omega)$ 中至少有两个非平凡解.

证 由引理 2 知泛函 I_λ 是强制的. 因此，利用 Sobolev 嵌入定理及范数的弱下半连续性知 I_λ 是弱下半连续的. 由 Weierstrass 定理，存在 $u_0\in H^1(\Omega)$，使得

$$I_\lambda(u_0)=\inf\{I_\lambda(u): u\in H^1(\Omega)\}$$

由引理 4 有 $I_\lambda(t_1\hat{u}_1)<0$，所以 $I_\lambda(u_0)<0=I_\lambda(0)$. 因此，$u_0\neq 0$. 由引理 5 知，存在足够小的 $\rho\in(0,1)$，使得

$$I_\lambda(u_0)<0=I_\lambda(0)<\inf\{I_\lambda(u):\ \|u\|=\rho\}=M_\rho \tag{10}$$

由引理 4 和(10) 式知，I_λ 满足山路引理条件. 所以存在 $\hat{u}\in H^1(\Omega)$，使得：

$$\hat{u}\in K_{I_\lambda}\qquad 0=I_\lambda(0)<M_\rho\leqslant I_\lambda(\hat{u}) \tag{11}$$

由(10) 式和(11) 式知，$\hat{u}\notin\{0,u_0\}$. 因此，方程(1) 在 $H^1(\Omega)$ 中至少存在两个非平凡解.

参考文献：

[1] PAPAGEORGIOU N S, RADULESCU V D. Multiplicity of Solutions for Resonant Nuemann Problems with an Indefinite and Unbounded Potential [J]. Transac of the Ameri Mathe Society, 2014, 367(12): 8723-8756.

[2] PAPAGEORGIOU N S, RADULESCU V D. Nuemann Problems with Indefinite and Unbounded Potential and Concave Terms [J]. Proc Amer Math Soci, 2015, 143(11): 4803-4816.

[3] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60-63.

[4] MAO A M, ZHANG Z T. Sign-Changing and Multiple Solutions of Kirchhoff Type Problems without the P. S. Condition

[J]. Nonlinear Anal，2009，70(3)：1275-1287.
[5] CHEN S J，LI L. Multiple Solutions for the Nonhomogeneous Kirchhoff Equation on $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Anal，2013，14(2)：1477-1486.
[6] 严忠权，柳　鸠. 具有一般临界增长的自治的 Kirchhoff 型方程正基态解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(2)：32-35.
[7] 王继禹，贾秀玲，段　誉，等. 一类具有临界增长项的 Kirchhoff 型方程正解的研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：61-66.
[8] 任正娟，商彦英. 带有临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(4)：78-84.
[9] 曾　兰，唐春雷. 带有临界指数的 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：29-34.
[10] 刘选状，吴行平，唐春雷. 一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：54-59.
[11] PAPAGEORGIOU N S，RADULESCU V D. Semilinear Neumann Problems with Indefinite and Unbounded Potential and Crossing Nonlinearity [J]. Proc Amer Math Soci，2013，595(10)：293-315.
[12] MOTREANU D，PAPAGEORGIOU N S. Multiple Solutions for Nonlinear Neumann Problems Driven by a Nonhomogeneous Differential Operator [J]. Proc Amer Math Soci，2011，139(10)：3527-3535.

Multiple Solutions for a Class of Kirchhoff Type Equation Involving Neumann Boundary Condition

WANG Shou-cai，　ZHAO Shi-hai，
XIONG Zong-hong，　CHU Chang-mu

School of Data Science and Information Engineering，Guizhou Minzu University，Guiyang 550025，China

Abstract：Using the mountain pass theorem and the minimization arguments，a class of Kirchhoff type equation has been studied involving Neumann boundary condition and obtain the multiplicity of nontrivial solutions.

Key words：Kirchhoff type equation；Neumann boundary；mountain pass theorem；minimization argument

责任编辑　廖　坤