第 44 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 4 月
Vol. 44 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.004

带有一般非线性项的分数阶 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统的变号解①

叶景兰, 邓圣兵

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 研究了 $\mathbb{R}^3$ 上分数阶 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统,当非线性项满足广义次临界以及某种单调性条件时,利用变号 Nehari 流形和定量形变引理,获得了该系统有基态变号解且仅变号一次.

关 键 词: 分数阶 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统;变号 Nehari 流形;定量形变引理

中图分类号: O176.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)04-0016-06

考虑分数阶 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统:

$$\begin{cases}\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\dfrac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)(-\Delta)^s u+V(x)u+\phi u=f(x,u) & x\in\mathbb{R}^3\\ (-\Delta)^t\phi=u^2 & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a,b>0$, $s,t\in(0,1)$, $4s+2t>3$, $(-\Delta)^s$ 是分数阶 Laplacian 算子,定义为

$$-(-\Delta)^s u(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{3+2s}}\mathrm{d}y \qquad x\in\mathbb{R}^3$$

注意到,如果 $a=1$, $b=0$,则系统(1)称为分数阶 Schrödinger-Poisson 系统,关于其解的存在性和多重性的结果,可以参考文献[1-5]. 如果 $\phi=0$,系统(1)退化为分数阶 Kirchhoff 方程. 一方面,对于经典的 Kirchhoff 方程,文献[6]用 Cerami 条件与下降流不变集证明了其在有界区域存在正解、负解、变号解. 接着,如果 $V(x)$ 使得空间有紧嵌入,文献[7]用约束变分方法和定量形变引理得到了最小能量解的存在性,并知其有两个结点域. 运用类似于文献[7]的方法,文献[8]证明了分数阶 Kirchhoff 方程存在变号解. 另一方面,对于经典的 Schrödinger-Poisson 系统,如果 $f(x,u)=|u|^{p-2}u$ 且 $p\in[4,6)$,文献[9]使用热流极限法获得了径向变号解的存在性. 近来,运用文献[7]的方法,文献[10]得到了带有一般非线性项的分数阶 Schrödinger-Poisson 系统变号解的存在性. 关于变号解的其它结果,我们可参考文献[11-12]及其参考文献. 目前,据作者所知,关于系统(1)变号解的情况无人研究,我们将文献[10]中 $f(x,u)$ 的次临界条件推广为广义次临界条件,得到关于系统(1)的变号解的存在性结果.

现在我们引入空间结构. 定义

$$H^s(\mathbb{R}^3)=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^3):\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{3}{2}+s}}\in L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\right\}$$

相应范数为

① 收稿日期:2018-11-26
基金项目:国家自然科学基金项目(11501469).
作者简介:叶景兰(1996-),女,硕士研究生,主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者:邓圣兵,教授,博士研究生导师.

$$\| u \|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \left(\| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{| u(x) - u(y) |^2}{| x - y |^{3+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}}$$

在本文中，我们将系统(1) 的解定义在分数 Sobolev 空间

$$H = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^3): \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u^2 \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

上，相应范数为

$$\| u \| = \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{| u(x) - u(y) |^2}{| x - y |^{3+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^3} V(x) u^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

为了有紧嵌入，我们给位势 $V(x)$ 加上以下条件：

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 且 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3} V(x) > 0$. 如果当 $|x| \to +\infty$ 时，有 $V(x) \to +\infty$，则对任意 $2 \leqslant q < 2_s^*$，H 能紧嵌入到 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中，其中 $2_s^* = \dfrac{6}{3-2s}$ 为分数阶 Sobolev 临界指数.

一个更加广义的紧嵌入条件为

(V_2) 存在 $r_0 > 0$，使得对任意 $M > 0$，$\lim\limits_{|y|\to+\infty} m(\{x \in B_{r_0}(y): V(x) \leqslant M\}) = 0$，其中 m 为 Lebesgue 测度，$B_{r_0}(y)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 y 为圆心、$r_0 > 0$ 为半径的开球.

接着，我们假设非线性项 $f(x, u)$ 满足以下条件：

(f_1) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 Carathéodory 函数，且当 $u \to 0$ 时，有 $f(x, u) = o(|u|)$ 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立；

(f_2) 存在 $p \in (4, 2_s^*]$，使得 $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{f(x, u)}{|u|^{p-1}} = 0$ 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立；

(f_3) $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{F(x, u)}{u^4} = +\infty$ 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立，其中 $F(x, u) = \int_0^u f(x, t)\mathrm{d}t$；

(f_4) $\dfrac{f(x, u)}{|u|^3}$ 关于 $u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 单调递增对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立.

由 Lax-Milgram 定理知

$$\phi_u^t(x) = c_t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{| x - y |^{3-2t}} \mathrm{d}y \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

是分数阶 Poisson 方程 $(-\Delta)^t \phi = u^2 (x \in \mathbb{R}^3)$ 的唯一弱解，其中 $\phi_u^t(x)$ 为 t-Riesz 位势，且

$$c_t = \pi^{-\frac{3}{2}} 2^{-2t} \frac{\Gamma(3-2t)}{\Gamma(t)}$$

我们回顾一个广义的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式：

性质 1[13]　令 $m, r > 1$，$0 < \mu < 3$，$\dfrac{1}{m} + \dfrac{\mu}{3} + \dfrac{1}{r} = 2$，$f \in L^m(\mathbb{R}^3)$ 并且 $h \in L^r(\mathbb{R}^3)$，则存在不依赖于 f 和 h 的常数 C，使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)h(y)}{| x - y |^{\mu}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C(m, \mu, r) \| f \|_{L^m(\mathbb{R}^3)} \| h \|_{L^r(\mathbb{R}^3)}$$

由性质 1 可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 \mathrm{d}x \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^3} u^{\frac{12}{3+2t}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{3+2t}{3}}$$

因此，对任意 $4s + 2t \geqslant 3$，$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 \mathrm{d}x$ 有定义且属于 $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. 与此同时，我们还有：

性质 2[1]　(a) 如果 $4s + 2t > 3$，并且 $u_n \rightharpoonup u (x \in H)$，那么 $\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 \mathrm{d}x$；

(b) 如果 $4s + 2t \geqslant 3$，并且 $u_n \to u (x \in H)$，那么 $\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 \mathrm{d}x$.

由性质 2，对任意 $4s + 2t \geqslant 3$，由条件(f_1)－(f_2) 可知系统(1) 有变分结构，其能量泛函为

$$\mathscr{L}_b(u)=\frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x$$

且 $\mathscr{L}_b(u)\in C^1(H,\mathbb{R})$. 于是，对任意 $v(x)\in H$，有

$$\langle\mathscr{L}'_b(u),v\rangle=a\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v\mathrm{d}x+b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}V(x)uv\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t uv\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)v\mathrm{d}x$$

定义：

$$u^+=\max\{u(x),0\}\qquad u^-=\min\{u(x),0\}$$

对局部问题，有下述分解：

$$\mathscr{L}(u)=\mathscr{L}(u^+)+\mathscr{L}(u^-)\qquad\langle\mathscr{L}'(u),u^+\rangle=\langle\mathscr{L}'(u^+),u^+\rangle\qquad\langle\mathscr{L}'(u),u^-\rangle=\langle\mathscr{L}'(u^-),u^-\rangle$$

由于非局部项 $\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)(-\Delta)^s u$ 受 $(-\Delta)^s u$ 和 ϕ_u^t 的影响，泛函 $\mathscr{L}_b$ 不再满足以上分解，我们能够计算出：

$$\mathscr{L}_b(u)>\mathscr{L}_b(u^+)+\mathscr{L}_b(u^-)\qquad\langle\mathscr{L}'_b(u),u^+\rangle>\langle\mathscr{L}'_b(u^+),u^+\rangle\qquad\langle\mathscr{L}'_b(u),u^-\rangle>\langle\mathscr{L}'_b(u^-),u^-\rangle$$

最后，定义与 $\mathscr{L}_b$ 相关的变号 Nehari 流形和 Nehari 流形分别为：

$$\mathscr{N}^b_{\mathrm{nod}}=\{u\in H: u^\pm\neq 0,\langle\mathscr{L}'_b(u),u^\pm\rangle=0\}\qquad c^b_{\mathrm{nod}}=\inf_{u\in\mathscr{N}^b_{\mathrm{nod}}}\mathscr{L}_b(u)$$

$$\mathscr{N}^b=\{u\in H\backslash\{0\}:\langle\mathscr{L}'_b(u),u\rangle=0\}\qquad c^b=\inf_{u\in\mathscr{N}^b}\mathscr{L}_b(u)$$

本文中，$C>0$ 总表示一个常数. 我们的主要结果如下：

定理 1 假设条件$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$及$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_2)$成立，那么系统(1) 至少有 1 个基态变号解 $u_b\in H$.

定理 2 定理 1 中的 u_b 仅变号一次.

我们知道系统(1) 的任意变号解属于 $\mathscr{N}^b_{\mathrm{nod}}$. 然而，与局部情况不同的是，我们不知道 $\mathscr{N}^b_{\mathrm{nod}}$ 是否为空集. 因此我们首先需要证明 $\mathscr{N}^b_{\mathrm{nod}}$ 非空.

引理 1 假设条件$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$和$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_2)$成立，那么对任意 $u\in H$ 且 $u^\pm\neq 0$，存在唯一的 $\alpha_u>0$，$\beta_u>0$，使得 $\alpha_u u^++\beta_u u^-\in\mathscr{N}^b_{\mathrm{nod}}$ 并有 $\mathscr{L}_b(\alpha_u u^++\beta_u u^-)=\max\limits_{\alpha,\beta>0}\mathscr{L}_b(\alpha u^++\beta u^-)$.

证 证明类似于文献[10] 中引理 2.1.

引理 2 假设条件$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$和$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_2)$成立，那么对任意 $u\in H$ 且 $u^\pm\neq 0$，$\langle\mathscr{L}'_b(u),u^\pm\rangle\leqslant 0$，则引理 1 中的 α_u,β_u 满足 $0<\alpha_u,\beta_u\leqslant 1$.

证 证明类似于文献[10] 中引理 2.2.

引理 3 假设条件$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$和$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_2)$成立，那么

$$c^b_{\mathrm{nod}}=\inf_{u\in\mathscr{N}^b_{\mathrm{nod}}}\mathscr{L}_b(u)=\inf_{u\in H,\,u^\pm\neq 0}\max_{\alpha,\beta>0}\mathscr{L}_b(\alpha u^++\beta u^-)$$

在某个 $u_b\in H$ 可达，并且 $c^b_{\mathrm{nod}}>0$.

证 证明思想大部分与文献[10] 中引理 2.3 和引理 2.4 相似. 不同的是，在证明 $u_b^\pm\neq 0$ 时，由条件(f_1)及广义次临界条件(f_2)可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$ 和 $4<r<2_s^*$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)u\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u|^r\mathrm{d}x\tag{2}$$

再由(2) 式、$\langle\mathscr{L}'_b(u_n),u_n\rangle=0$ 和 Sobolev 嵌入定理，对任意 $r\in(4,2_s^*)$，我们有

$$a\|u_n\|^2\leqslant a\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_n^2\mathrm{d}x+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\varepsilon C\|u_n\|^2+\varepsilon C\|u_n\|^{2_s^*}+C_\varepsilon C\|u_n\|^r\tag{3}$$

(3) 式意味着 $\|u_n\|\geqslant\kappa>0$，且$\{u_n\}$ 在 H 中有界. 因此存在子列，仍然记作$\{u_n\}$，有：

$$\begin{cases} u_n^{\pm} \rightharpoonup u_b^{\pm} & x \in H \\ u_n^{\pm} \to u_b^{\pm} & x \in L^q(\mathbb{R}^3),\ q \in [2,\ 2_s^*] \\ u_n^{\pm} \to b_b^{\pm} & \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^3 \\ (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n^{\pm} \to (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_b^{\pm} & \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{4}$$

同样地，我们有 $\| u_n^{\pm} \| > 0$.

接下来由(4)式可知，对任意 $r \in (4,\ 2_s^*)$，有：

$$\begin{aligned} & f(x,\ u_n^+)u_n^+ \to f(x,\ u_b^+)u_b^+ \qquad \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^3 \\ & \varepsilon |u_n^+|^2 + \varepsilon |u_n^+|^{2_s^*} + C_\varepsilon |u_n^+|^r \to \varepsilon |u_b^+|^2 + \varepsilon |u_b^+|^{2_s^*} + C_\varepsilon |u_b^+|^r \qquad \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^3 \\ & |f(x,\ u_n^+)u_n^+| \leqslant \varepsilon |u_n^+|^2 + \varepsilon |u_n^+|^{2_s^*} + C_\varepsilon |u_n^+|^r \end{aligned} \tag{5}$$

由(4)式与 ε 的任意性得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon |u_n^+|^2 \mathrm{d}x + \varepsilon |u_n^+|^{2_s^*} + C_\varepsilon |u_n^+|^r \mathrm{d}x = C_\varepsilon |u_b^+|^r \tag{6}$$

我们可从(5),(6)式和广义控制收敛定理得出

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,\ u_n^+)u_n^+ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,\ u_b^+)u_b^+ \mathrm{d}x$$

如果 $u_b^+ = 0$，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x,\ u_n^+)u_n^+ = 0$，这与 $\| u_n^+ \| > 0$ 矛盾. 因此 $u_b^+ \neq 0$. 类似于上述证明，可以得到

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,\ u_n^-)u_n^- \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,\ u_b^-)u_b^- \mathrm{d}x$$

且 $u_b^- \neq 0$.

定理 1 的证明　我们用定量形变引理去证明 $\mathscr{L}_b'(u_b) = 0$. 因为 $u_b \in \mathcal{N}_{\mathrm{nod}}^b$，且

$$\mathscr{L}_b'(u_b)u_b^+ = \mathscr{L}_b'(u_b)u_b^- = 0$$

由引理 1 知，对任意$(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 且$(\alpha,\ \beta) \neq (1,\ 1)$，有

$$\mathscr{L}_b(\alpha u_b^+ + \beta u_b^-) < \mathscr{L}_b(u_b^+ + u_b^-) = c_{\mathrm{nod}}^b$$

假设 $\mathscr{L}_b'(u_b) \neq 0$，那么存在 $\tau > 0$ 及 $\delta > 0$，使得对任意 $\| v - u_b \| \leqslant 3\delta$ 有 $\| \mathscr{L}'(v) \| \geqslant \tau$. 令：

$$D = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right) \qquad h(\alpha,\ \beta) = \alpha u_b^+ + \beta u_b^-$$

再次使用引理 1 ，可得

$$\omega = \max_{\partial D} \mathscr{L}_b \circ h(\alpha,\ \beta) < c_{\mathrm{nod}}^b \tag{7}$$

定义：

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{c_{\mathrm{nod}}^b - \omega}{2},\ \frac{\tau\delta}{8}\right\} \qquad S_\delta = \{u \in H:\ \| u - u_b \| \leqslant \delta\}$$

文献[14]中引理 2.3 告诉我们，存在形变 $\eta \in C([0,\ 1] \times H,\ H)$，使得：

(a) 如果 $u \notin \mathscr{L}_b^{-1}([c_{\mathrm{nod}}^b - 2\varepsilon,\ c_{\mathrm{nod}}^b + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$，则 $\eta(1,\ u) = u$；

(b) $\eta(1,\ \mathscr{L}_b^{c_{\mathrm{nod}}^b+\varepsilon} \cap S_\delta) \subset \mathscr{L}_b^{c_{\mathrm{nod}}^b-\varepsilon}$；

(c) 对任意 $u \in H$ ，$\mathscr{L}_b(\eta(1,\ u)) \leqslant \mathscr{L}_b(u)$.

于是 $\max\limits_{(\alpha,\ \beta)\in\bar{D}} \mathscr{L}_b(\eta(1,\ h(\alpha,\ \beta))) < c_{\mathrm{nod}}^b$.

现在我们证明 $\eta(1,\ h(D)) \cap \mathcal{N}_{\mathrm{nod}}^b \neq \varnothing$，这与 c_{nod}^b 的定义矛盾. 令：

$$h_1(\alpha,\ \beta) = \eta(1,\ h(\alpha,\ \beta))$$

$$\varphi(\alpha,\ \beta) = (\langle \mathscr{L}_b'(h(\alpha,\ \beta)),\ u_b^+ \rangle,\ \langle \mathscr{L}_b'(h(\alpha,\ \beta)),\ u_b^- \rangle)$$

$$\varphi_1(\alpha,\ \beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\langle \mathscr{L}_b'(h_1(\alpha,\ \beta)),\ h_1^+(\alpha,\ \beta)\rangle,\ \frac{1}{\beta}\langle \mathscr{L}_b'(h_1(\alpha,\ \beta)),\ h_1^-(\alpha,\ \beta)\rangle\right)$$

由引理 1 和度理论，有 $\deg(\varphi,\ D,\ 0) = 1$. 再根据(7)式，可验证 $h|_{\partial D} = h_1|_{\partial D}$，或等价地有 $\phi|_{\partial D} = \varphi_1|_{\partial D}$. 由

度的边界值性质可知 $\deg(\varphi_1, D, 0)=\deg(\varphi, D, 0)=1$. 因此对某个$(\alpha_0, \beta_0)\in D$,我们有 $\varphi_1(\alpha_0, \beta_0)=0$,这一点使得 $h_1(\alpha_0, \beta_0)=\eta(1, h(\alpha_0, \beta_0))\in \mathcal{N}_{nod}^b$,这是不可能的. 因此 $\mathscr{L}'_b(u_b)=0$,即 u_b 是系统(1)的变号解.

定理 2 的证明 假设

$$u_b = u_1 + u_2 + u_3 \qquad u_1 \geqslant 0,\ u_2 \leqslant 0,\ u_i \not\equiv 0 (i=1,2,3)$$

且

$$\operatorname{supp}(u_i) \cap \operatorname{supp}(u_j) = \varnothing \qquad i \neq j,\ i,j=1,2,3$$

令 $v=u_1+u_2$,有 $v^+=u_1$,$v^-=u_2$,那么 $v^{\pm}\neq 0$. 通过引理 1,存在唯一的 $\alpha_v>0$,$\beta_v>0$,使得 $\alpha_v v^+ + \beta_v v^- \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^b$,或等价地有 $\alpha_v u_1 + \beta_v u_2 \in \mathcal{N}_{\text{nod}}^b$,所以 $\mathscr{L}_b(\alpha_v v^+ + \beta_v v^-)\geqslant c_{\text{nod}}^b$. 与此同时,$\langle \mathscr{L}'_b(u_b), u_i\rangle = 0$ 导致了 $\langle \mathscr{L}'_b(v), v^{\pm}\rangle < 0 (i=1,2,3)$,再由引理 2 得到 $0<\alpha_v, \beta_v \leqslant 1$.

定义:

$$A_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_i (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_j \mathrm{d}x \qquad B_i = \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_i^2 \mathrm{d}x \qquad C_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_i}^t u_j^2 \mathrm{d}x$$

$$L = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(u_1+u_2+u_3)|^2 \mathrm{d}x \qquad i,j=1,2,3$$

一方面,由条件(f_4)可知

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{1}{4}\langle \mathscr{L}'_b(u_b), u_3\rangle = \frac{a}{4}\sum_{i=1}^{3} A_{i3} + \frac{b}{4} L \sum_{i=1}^{3} A_{i3} + \frac{1}{4} B_3 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} C_{i3} - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} f(x, u_3) u_3 \mathrm{d}x < \\ &\mathscr{L}_b(u_3) + \frac{a}{4} A_{13} + \frac{a}{4} A_{23} + \frac{1}{4} C_{13} + \frac{1}{4} C_{23} + \frac{b}{4} L \sum_{i=1}^{3} A_{i3} - \frac{b}{4} A_{33}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

另一方面,由(8)式,且 $0<\alpha_v, \beta_v \leqslant 1$,可推出

$$\begin{aligned} c_{\text{nod}}^b \leqslant &\mathscr{L}_b(\alpha_v u_1 + \beta_v u_2) = \mathscr{L}_b(\alpha_v u_1 + \beta_v u_2) - \frac{1}{4}\langle \mathscr{L}'_b(\alpha_v u_1 + \beta_v u_2), \alpha_v u_1 + \beta_v u_2\rangle = \\ &\frac{a\alpha_v^2}{4} A_{11} + \frac{a\beta_v^2}{4} A_{22} + \frac{a\alpha_v\beta_v}{2} A_{12} + \frac{\alpha_v^2}{4} B_1 + \frac{\beta_v^2}{4} B_2 + \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}(f(x, \alpha_v u_1)\alpha_v u_1 - 4F(x, \alpha_v u_1))\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}(f(x, \beta_v u_2)\beta_v u_2 - 4F(x, \beta_v u_2))\mathrm{d}x \leqslant \\ &\frac{a}{4} A_{11} + \frac{a}{4} A_{22} + \frac{a}{2} A_{12} + \frac{1}{4} B_1 + \frac{1}{4} B_2 + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}(f(x, u_1)u_1 - 4F(x, u_1))\mathrm{d}x + \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}(f(x, u_2)u_2 - 4F(x, u_2))\mathrm{d}x < \\ &\sum_{i=1}^{3} \mathscr{L}_b(u_i) + aA_{12} + aA_{13} + aA_{23} + \frac{1}{4}(C_{13} + C_{23} + C_{21} + C_{31} + C_{12} + C_{32}) + \\ &\frac{b}{4} L^2 - \frac{b}{4}\sum_{i=1}^{3} A_{ii}^2 = \mathscr{L}_b(u_b) = c_{nod}^b \end{aligned}$$

这是不可能的,因此 $u_3=0$,所以 u_b 仅变号一次.

参考文献:

[1] TENG K M. Corrigendum to “Existence of Ground State Solutions for the Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson System with Critical Sobolev Exponent” [J]. J Differential Equations, 2016, 261(6): 3061-3106.

[2] ZHANG J J, DO ÓJ M, SQUASSINA M. Fractional Schrödinger-Poisson Systems with a General Subcritical or Critical Nonlinearity [J]. Adv Nonlinear Stud, 2016, 16(1): 15-30.

[3] 李勇勇,唐春雷. 一类带双临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统正基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 84-91.

[4] 高艳平,廖家锋,唐春雷. 一类 Schrödinger-Poisson 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(4): 23-26.

[5] 李苗苗，唐春雷．一类带临界指数的 Schrödinger-Poisson 方程正解的存在性［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：35-38.

[6] MAO A M，ZHANG Z T. Sign-Changing and Multiple Solutions of Kirchhoff Type Problems without the P. S. Condition [J]. Nonlinear Anal，2009，70(3)：1275-1287.

[7] WEI S A. Sign-Changing Solutions for a Class of Kirchhoff—Type Problem in Bounded Domains [J]. J Differential Equations，2015，259(4)：1256-1274.

[8] CHENG K，GAO Q，Sign-Changing Solutions for the Stationary Kirchhoff Problems Involving the Fractional Laplacian in $\mathbb{R}^N$ [J]. Acta Mathematica Scientia，2018，38(6)：1712-1730.

[9] IANNI I. Sign-Changing Radial Solutions for the Schrödinger-Poisson-Slater Problem [J]. Topol Methods Nonlinear Anal，2013，41(2)：365-386.

[10] JI C. Ground State Sign-Changing Solutions for a Class of Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson System in $\mathbb{R}^3$ [EB/OL]. [2018-09-26]. https：//arXiv：1703. 03723v1 [math. AP].

[11] CHEN W J，MOSCONI S，SQUASSINA M. Nonlocal Problems with Critical Hardy Nonlinearity [J]. Journal of Functional Analysis，2018，275(11)：3065-3114.

[12] ZHONG X J，TANG C L. Ground State Sign-Changing Solutions for a Schrödinger-Poisson System with a 3-Linear Growth Nonlinearity [J]. J Math Anal Appl，2017，455(10)：1956-1974.

[13] LIEB E H，LOSS M. Analysis [M]. 2 th ed. Rhode island：AMS，2001.

[14] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston：Birkháuser，1996.

Sign-Changing Solution for fractional Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System with General Nonlinearity

YE Jing-lan，　DENG Sheng-bing

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：The main objective of the paper is to investigate the existence of ground state sign-changing solutions for a fractional Kirchhoff-Schrödinger-Poisson system in $\mathbb{R}^3$ under general sublinear and some strict condition. With the help of sign-changing Nehari manifold and quantitative deformation lemma，It has been obtained that the system has a ground state sign-changing solution，which changes sign only once.

Key words：Fractional Kirchhoff-Schrödinger-Poisson system；sign-changing Nehari manifold；quantitative deformation lemma

责任编辑　廖　坤