第 44 卷 第 4 期　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　2019 年 4 月
Vol. 44 No. 4　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Apr. 2019

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.005

一类渐近 3 -线性 Kirchhoff 型方程的正基态解①

陈　星，　吴行平，　唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：采用变分方法研究了一类渐近 3 -线性 Kirchhoff 型方程．利用极小作用原理，得到非零非负解的存在性．最后利用强极大值原理，得到了一个正的基态解．

关　键　词：Kirchhoff 方程；基态解；极小作用原理；变分方法

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2019)04－0022－04

本文主要考虑如下 Kirchhoff 方程：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \lambda u^3 + \mu |u|^{q-2} u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，$a, b, \lambda, \mu > 0$，$2 < q < 4$．在一定条件下，我们利用极小作用原理得到了一个正的基态解．

我们知道，Kirchhoff 型方程最早由文献[1]提出．该方程是 D'Alembert 波方程的拓展与延伸．最近几年来，下面临界的 Kirchhoff 型方程解的存在性以及多重性引起了人们的广泛关注：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \mu |u|^{2^*-2} u + \lambda f(x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

当 $N = 3$，$\mu = 1$，$f(x, u) = |u|^{q-2} u$ 时，文献[2－3]研究了 Kirchhoff 方程正解的存在性和多重性．文献[2]研究了 $1 < q < 2$ 的情况，并利用 Nehari 流形和 Ekeland 变分原理，证明了存在一个仅依赖于 a 的 $T_4(a) > 0$，当 $a > 0$，$0 < \lambda < T_4(a)$ 时，方程至少有 1 个正解．文献[3]研究了 b 足够小，$1 < q < 2$ 的情况，利用集中紧性原理得到 2 个正解，其中一个为基态解．

当 $N = 4$，$f(x, u) = |u|^{q-2} u$ 时，文献[4]研究了 $2 \leqslant q < 4$ 的情况，在相应的条件下，利用变分方法和集中紧性原理得出了一个解．

文献[5]研究了方程(1) 当 $1 < q < 2$ 时解的情况，并得出相应的结论．

受到以上结论的启发，我们考虑当 $2 < q < 4$ 时方程(1) 解的情况．我们用 λ_1 表示方程

$$\begin{cases} -\left(b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \lambda u^3 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

的第一特征值，由文献[6]我们知道 $\lambda_1 > 0$，并得出如下的定理：

定理 1　如果 $a \geqslant 0$，$b > 0$，$2 < q < 4$，则存在 μ_0，使得当 $0 < \lambda < b\lambda_1$ 时，对任意的 $\mu > \mu_0$，方程(1)

---

①　收稿日期：2018－10－09

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267)．

作者简介：陈　星(1992－)，男，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究．

通信作者：吴行平，教授．

有一个正的基态解，其中 $\mu_0 = \dfrac{qS^{\frac{q}{2}}\left(\dfrac{\lambda}{a\lambda_1}\right)^{\frac{q}{2}}}{|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}} g(R)$.

注 1　众所周知，当 $a=0$，$b>0$ 时，方程(1) 被称为退化的 Kirchhoff 型方程. 根据后文定理 1 的证明，可以知道存在一个 μ_0，使得当 $0<\lambda<b\lambda_1$ 时，对任意的 $\mu>\mu_0$，方程(1) 有一个正的基态解. 本文是对文献[5] 的补充.

一般地，我们记 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数为

$$\| u \| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

测度空间 $L^p(\Omega)$ 中的范数为

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

我们知道 $H_0^1(\Omega) \cup L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant 6)$ 是连续的，当 $1 \leqslant p < 6$ 时嵌入是紧的. 令 S 为最佳 Sobolev 常数，即

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}$$

对任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$，定义

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{4}\int_\Omega |u|^4 \mathrm{d}x - \frac{\mu}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x$$

如果 $u \in H_0^1(\Omega)$，且对任意的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$，都有

$$\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi)\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega |u|^2 u\phi \mathrm{d}x - \mu\int_\Omega |u|^{q-2} u\phi \mathrm{d}x = 0$$

则我们称 u 为方程(1) 的弱解. 我们将用极小作用原理得出方程(1) 的一个正基态解. 其它符号和术语参见文献[7－11].

引理 1　能量泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强制且下方有界. 我们定义 $m = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$，则 $m<0$.

证　由已知条件我们知道 $0<\lambda<b\lambda_1$，根据 Poincaré 不等式可以得到

$$\lambda_1 |u|_4^4 \leqslant \|u\|^4$$

对于每一个 $0<\lambda<b\lambda_1$，根据 Hölder 不等式以及 Sobolev 不等式，有

$$I(u) \geqslant \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{4\lambda_1}\|u\|^4 - \frac{\mu}{q}|\Omega|^{\frac{6-q}{6}} S^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q =$$

$$\frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\left(b - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^4 - \frac{\mu}{q}|\Omega|^{\frac{6-q}{6}} S^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q \geqslant$$

$$\frac{1}{4}\left(b - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^4 - \frac{\mu}{q}|\Omega|^{\frac{6-q}{6}} S^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q$$

因为 $2<q<4$，$0<\lambda<b\lambda_1$，所以对任意的 $\mu>\mu_0$，能量泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强制且下方有界. 因此

$$m = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$$

是定义良好的. 另一方面

$$I(u) \geqslant \frac{a}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{4\lambda_1}\|u\|^4 - \frac{\mu}{q}|\Omega|^{\frac{6-q}{6}} S^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q$$

令 $g(t) = \frac{a}{2}t^2 - \frac{\lambda}{4\lambda_1}t^4$，则存在常数 $R = \left(\frac{a\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$，使得

$$\max_{t>0} g(t) = g(R) > 0$$

令 $\mu_0 = \dfrac{qS^{\frac{q}{2}}\left(\dfrac{\lambda}{a\lambda_1}\right)^{\frac{q}{2}}}{|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}} g(R)$，当 $\mu > \mu_0$ 时，经过计算可得 $m < 0$.

定理 1 的证明 根据 m 的定义，存在一个极小化序列 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = m < 0$. 因为 $I(|u_n|) = I(u_n)$，所以可以直接假设 $u_n \geqslant 0$ 对于 Ω 中的几乎每一个 x 都成立. 这个时候可以取一个子列，仍然用 $\{u_n\}$ 来表示，则当 $n \to \infty$ 时，存在一个 $u_* \geqslant 0$，满足

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_* & x \in H_0^1(\Omega) \\ u_n \to u_* & x \in L^p(\Omega),\ 1 \leqslant p < 6 \\ u_n(x) \to u_*(x) & \text{a. e. } x \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

首先，可以断言 $u_n \to u_*$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中成立. 一般地，我们令 $\omega_n = u_n - u_*$，只需要证明当 $n \to \infty$ 时，$\|\omega_n\| \to 0$. 令 $l = \lim\limits_{n\to\infty} \|\omega_n\|$. 从(3) 式可以得到：

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^4 \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_*|^4 \mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_*|^q \mathrm{d}x \tag{5}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla \omega_n|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_*|^2 \mathrm{d}x + o(1) \tag{6}$$

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2 = \|\omega_n\|^4 + \|u_*\|^4 + 2\|\omega_n\|^2 \|u_*\|^2 + o(1) \tag{7}$$

因此，从(4)－(7) 式，我们可以得到

$$\begin{aligned} m = &\lim_{n\to\infty} I(u_n) = \\ &I(u_*) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\|\omega_n\|^2 + \frac{b}{4}\|\omega_n\|^4 + \frac{b}{2}\|\omega_n\|^2\|u_*\|^2\right) = \\ &I(u_*) + \left(\frac{a}{2}l^2 + \frac{b}{4}l^4 + \frac{b}{2}l^2\|u_*\|^2\right) \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，如果 $l \equiv 0$，则在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \to u_*$. 如果 $l > 0$，我们可以推断出 $I(u_*) < m$，这就和 m 的定义相矛盾. 因此 $l \equiv 0$. 也就是说我们的论断成立，并且 $I(u_*) = m$.

接下来要证明 u_* 是方程(1) 的解.

明显地，因为 $I(u_*) = m < 0$，我们可以得到在 Ω 中 $u_*(x) \not\equiv 0$. 又因 $I(u_*) = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$，因此对于所有的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 以及 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &\lim_{t\to 0}\frac{I(u_* + t\phi) - I(u_*)}{t} = \\ &(a + b\|u_*\|^2)\int_\Omega (\nabla u_* \cdot \nabla \phi)\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega u_*^3 \phi \mathrm{d}x - \mu\int_\Omega |u_*|^{q-2} u_* \phi \mathrm{d}x \end{aligned}$$

同样地，该不等式对任意的 $-\phi$ 也成立，因此

$$(a + b\|u_*\|^2)\int_\Omega (\nabla u_* \cdot \nabla \phi)\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega u_*^3 \phi \mathrm{d}x - \mu\int_\Omega |u_*|^{q-2} u_* \phi \mathrm{d}x = 0 \tag{8}$$

对所有的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 都成立，所以 u_* 的确是方程(1) 的一个解.

最后，我们可以断言 u_* 是正基态解. 事实上，取 $\phi = u_*$，从(8) 式可以得到

$$\int_\Omega (\nabla u_* \cdot \nabla u_*)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

因为 $u_* \geqslant 0$ 且 $u_* \not\equiv 0$，由强极大值原理，我们可以得到

$$u_*(x) > 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

整理后可以得到 $I(u_*) = m = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$，因此 u_* 是方程(1) 的正基态解.

参考文献：

[1] KIRCHHOFF G. Mechanik [M]. Teubner：Leipzig，1883.

[2] SUN Y J，LIU X. Existence of Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent [J]. J Partial Differ Equ，2012，25(2)：187-198.

[3] LEI C Y，LIU G S，GUO L T. Multiple Positive Solutions for a Kirchhoff Type Problem with a Critical Nonlinearity [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications，2016，31：343-355.

[4] NAIMEN D. The Critical Problem of Kirchhoff Type Elliptic Equations in Dimension Four [J]. J Differential Equations，2014，257(4)：1168-1193.

[5] LIAO J F，ZHANG P，LIU J，et al. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Kirchhoff Type Problems at Resonance [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2016，9(6)：1959-1974.

[6] PERERA K，ZHANG Z T. Nontrivial Solutions of Kirchhoff-Type Problems Via the Yang Index [J]. J Differential Equations，2006，221(1)：246-255.

[7] 廖家锋，张　鹏，唐春雷. 一类渐近 4 次线性 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(8)：19-22.

[8] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60-64.

[9] 刘选状，吴行平，唐春雷. 一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：54-59.

[10] 丁　瑶，廖家锋. 一类带临界指数的非齐次 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(12)：17-21.

[11] XIE Q L，WU X P，TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions For Kirchhoff Type Problem with Critical Exponent [J]. Commun Pure Appl Anal，2013，12(6)：2773-2794.

Existence of a Positive Ground State Solution for a Class of Asymptotically 3-Linear Kirchhoff-Type Equations

CHEN Xing，　WU Xing-ping，　TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we have mainly studied a class of asymptotically 3-linear Kirchhoff-type equations by variational method. Using the principle of minimal action，the existence of non-zero and non-negative solution is obtained. Finally，a positive ground state solution is obtained by using the strong maximum principle.

Key words：Kirchhoff equations；ground state solution；the least action principle；the variational methods

责任编辑　廖　坤