DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.006

一类超线性分数阶 Schrödinger 方程解的多重性[①]

陈 卫， 唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 考虑了一类超线性分数阶 Schrödinger 方程，当非线性项 f 满足广义次临界条件及其它条件时，利用对称山路引理和变分方法，得到了该类方程无穷多个大解的存在性，推广了已有的研究结果.

关 键 词： 分数阶 Schrödinger 方程；广义次临界；超线性；对称山路引理

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)04-0026-05

考虑如下分数阶 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u) & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N)\end{cases} \tag{1}$$

其中 $V: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$，$f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，$N > 2$，$s \in (0, 1)$. 这里的 $(-\Delta)^s$ 表示非局部分数阶算子，定义为 $(-\Delta)^s = \mathscr{G}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathscr{G}u)$，其中 $\mathscr{G}$ 表示在 $\mathbb{R}^N$ 的 Fourier 变换，而 $(-\Delta)^s$ 是关于 $|\xi|^s$ 的伪微分.

近年来，分数阶方程引起了许多学者的兴趣(见文献[1-4]). 文献[1]证明了当 $s \to 1$ 时 $(-\Delta)^s$ 退化为 $-\Delta$. 当 $s=1$ 时，方程(1)变为经典的 Schrödinger 方程. 文献[5-10]应用变分方法证明了分数阶 Schrödinger 方程无穷多个解的存在性，其中关于非线性项 f 在零点处和无穷远处的可解性的条件已经被广泛而又深入地研究，但这些研究大都要求非线性项 f 满足次临界条件，即

(f_0) $|f(x, t)| \leqslant C(|t| + |t|^{q-1})$，其中 $2 \leqslant q < 2_s^*$，$2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$.

本文在 f 满足广义次临界条件及其它条件下，利用文献[11]给出的对称山路引理，证明了方程(1)存在无穷多个解. 为了更加方便地陈述结论，我们将给出下面更加弱化的条件：

(V_1) $V(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ 且 $\inf_{\mathbb{R}^N} V(x) > 0$；

(V_2) 对于任意的 $M > 0$，都存在一个常数 $r > 0$，使得

$$\lim_{|y| \to \infty} \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N : |x-y| \leqslant r, V(x) \leqslant M\} = 0$$

(f_1) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(x, t)}{|t|^{2_s^*-2} t} = 0$ 对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立；

(f_2) $\limsup\limits_{t \to 0} \left|\dfrac{f(x, t)}{t}\right| < +\infty$ 对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立；

(f_3) $\lim\limits_{|t| \to \infty} \dfrac{F(x, t)}{|t|^2} = \infty$ 对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立；

(f_4) $\mathscr{F}(x, t) = tf(x, t) - 2F(x, t) \geqslant 0$，且存在常数 C，$r_0 \geqslant 0$ 及 $k > \max\left\{1, \dfrac{N}{2s}\right\}$，当 $|t| \geqslant r_0$ 时，有

---

① 收稿日期：2018-07-30
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介：陈 卫(1993-)，女，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：唐春雷，教授.

$$|F(x,t)|^k \leqslant C|t|^{2k}\mathscr{F}(x,t)$$

定理 1　假设 f 关于 t 是奇函数且满足条件(V_1)，(V_2)，$(f_1)-(f_4)$，那么方程(1)有无穷多个解.

注 1　当我们处理超线性问题时，经常会用到下面的这个条件：

(f_5) 存在常数 $\theta \geqslant 1$ 满足 $\theta\mathscr{F}(x,t) \geqslant \mathscr{F}(x,st)(\forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},\ s\in[0,1])$.

条件(f_4)比条件(f_5)更弱，详情可见文献[12]中引理 2.5 的证明. 条件(f_1)显然比条件(f_0)更弱，则定理 1 统一并推广了文献[5]和文献[6]中的定理 1.2. 本文关于非线性项 f 的条件是有意义的，存在函数满足条件$(f_1)-(f_4)$，但不满足文献[5]和文献[6]定理 1.2 中的条件. 事实上，和文献[12]一样，设 $h:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 为：

$$h(t)=\begin{cases} n^3\left(\dfrac{1}{n^2}-|t-n|\right)+\dfrac{1}{t} & |t-n|\leqslant\dfrac{1}{n^2},\ n=2,3,4\cdots \\ \dfrac{1}{t} & |t-n|>\dfrac{1}{n^2},\ n=2,3,4\cdots \end{cases}$$

和

$$f(x,t)=\begin{cases} \dfrac{2t\int_1^t h(s)\mathrm{d}s+t^2h(t)}{(\ln t+1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{t\int_1^t h(s)\mathrm{d}s}{2(\ln t+1)^{\frac{3}{2}}} & t\geqslant 1 \\ 2\left(t-\dfrac{1}{2}\right) & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right) \\ 0 & t\leqslant\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

容易验证，$f(x,t)$ 满足定理 1 的条件，但不满足条件(f_5).

为了方便，首先规定 $|\cdot|_p$ 为 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 空间中常用的范数. 在本篇文章中，由于有位势 V，我们考虑如下的子空间：

$$E=\left\{u\in H^s(\mathbb{R}^N): \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^2\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

则 E 是一个 Hilbert 空间，记其范数为

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+V(x)|u|^2]\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

相应的内积为

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}[(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v(x)+V(x)u(x)v(x)]\mathrm{d}x$$

引理 1[6]　假设条件(V_1)和(V_2)成立，则：当 $p\in[2,2_s^*]$ 时，$E\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ 是连续的；当 $p\in[2,2_s^*)$ 时，$E\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ 是紧的.

由引理 1 可知，存在常数 $r_p>0$，使得

$$|u|_p\leqslant r_p\|u\| \qquad \forall u\in E,\ p\in[2,2_s^*] \tag{2}$$

接下来，我们在 E 上定义方程(1)的能量泛函，即

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x \tag{3}$$

通过条件(f_1)，(f_2)及 $f\in C(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R})$，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $c(\varepsilon)>0$，$c_0>0$，有

$$|f(x,t)|\leqslant c_0|t|+c(\varepsilon)|t|^q+\varepsilon|t|^{2_s^*-1} \qquad q\in(1,2_s^*-1) \tag{4}$$

显然在条件(V_1)，(V_2)，(f_1)及(f_2)下，$I\in C^1(E,\mathbb{R})$，并且

$$\langle I'(u),v\rangle=\langle u,v\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x \qquad \forall u,v\in E \tag{5}$$

引理 2　假设条件(V_1)，(V_2)，$(f_1)-(f_4)$成立，若对任意的序列$\{u_n\}\subset E$ 满足

$$I(u_n)\to c \qquad \langle I'(u_n),u_n\rangle\to 0 \tag{6}$$

则$\{u_n\}$在 E 中有界，且$\{u_n\}$有收敛子列.

证　首先证明$\{u_n\}$在 E 中有界，可用反证法证明. 假设当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n\|\to\infty$. 设 $v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，

那么 $\| v_n \| = 1$，且由(2)式可知，$| v_n |_p \leqslant r_p \| v_n \| = r_p$，其中 $2 \leqslant p \leqslant 2_s^*$．从而存在子列，不妨设为 $\{v_n\}$，使得在 E 中 $v_n \rightharpoonup v$．那么由引理 1 可知：在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中 $v_n \to v$，其中 $2 \leqslant p < 2_s^*$；在 $\mathbb{R}^N$ 中 $v_n \to v$ 几乎处处成立．这里我们分两种情况进行讨论：

情况 1　若 $v = 0$，那么在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中 $v_n \to 0$，其中 $2 \leqslant p < 2_s^*$．由(5)式，当 n 充分大时，有

$$c + 1 \geqslant I(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{F}(x, u_n)\mathrm{d}x \tag{7}$$

由(3)式和(6)式可知

$$\frac{1}{2} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|F(x, u_n)|}{\| u_n \|^2}\mathrm{d}x \tag{8}$$

对于 $0 \leqslant a \leqslant b$，令

$$\Omega_n(a, b) = \{ x \in \mathbb{R}^N : a \leqslant | u_n(x) | < b\}$$

因此，由(4)式可得

$$\int_{\Omega_n(0, r_0)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{c_0}{2} + \frac{c(\varepsilon)}{q+1} r_0^{q-1} + \frac{\varepsilon}{2_s^*} r_0^{2_s^*-2}\right) \int_{\Omega_n(0, r_0)} |v_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant$$

$$d\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 \mathrm{d}x \to 0 \tag{9}$$

其中 $d = \frac{c_0}{2} + \frac{c(\varepsilon)}{q+1} r_0^{q-1} + \frac{\varepsilon}{2_s^*} r_0^{2_s^*-2}$．设 $k' = \frac{k}{k-1}$，因为 $k > \max\left\{1, \frac{N}{2s}\right\}$，所以 $2k' \in (2, 2_s^*)$．由(7)式和条件(f_4)，可得

$$\int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left[\left(\int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2}\right)^k \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{k}} \left[\int_{\Omega_n(r_0, \infty)} |v_n|^{2k'} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{k'}} \leqslant$$

$$C^{\frac{1}{k}} \left(\int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \mathscr{F}(x, u_n)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2k'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k'}} \leqslant$$

$$[C(c+1)]^{\frac{1}{k}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2k'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k'}} \to 0 \tag{10}$$

再结合(9)式和(10)式，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|F(x, u_n)|}{\| u_n \|^2}\mathrm{d}x = \int_{\Omega_n(0, r_0)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 \mathrm{d}x \to 0$$

这与(8)式矛盾．

情况 2　若 $v \neq 0$，设 $A = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) \neq 0\}$，那么 $\mathrm{meas}(A) > 0$，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} | u_n(x) | = +\infty$．通过条件$(\mathrm{f}_3)$，我们有

$$\lim_{|u_n(x)|\to+\infty} \frac{F(x, u_n(x))}{|u_n(x)|^2} = +\infty \tag{11}$$

因此，由(6)，(11)式及 Fatou 引理，有

$$\frac{1}{2} = \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{I(u_n)}{\| u_n \|^2} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 \mathrm{d}x\right) = \liminf_{n\to\infty} \int_A \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 \mathrm{d}x = +\infty$$

矛盾．因此 $\{u_n\}$ 在 E 中是有界的．

接下来证明 $\{u_n\}$ 有一个收敛子列．我们需要用到一个代数不等式，即对 $\forall p \geqslant 1$，有

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p) \qquad \forall a, b \geqslant 0 \tag{12}$$

注意到

$$\| u_n - u \|^2 = \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} [f(x, u_n) - f(x, u)](u_n - u)\mathrm{d}x \tag{13}$$

当 $n \to \infty$ 时，显然有

$$\langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u\rangle \to 0 \tag{14}$$

由(2)，(4)，(12)式及 Hölder 不等式，我们可得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} | f(x, u_n) - f(x, u) || u_n - u | \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(|f(x,u_n)|+|f(x,u)|)|u_n-u|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^N}c_0(|u_n|+|u|)|u_n-u|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}c(\varepsilon)(|u_n|^q+|u|^q)|u_n-u|\mathrm{d}x+\\&\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon(|u_n|^{2_s^*-1}+|u|^{2_s^*-1})|u_n-u|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^N}2c_0(|u_n-u|+|u|)|u_n-u|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}2^qc(\varepsilon)(|u_n-u|^q+|u|^q)|u_n-u|\mathrm{d}x+\\&\int_{\mathbb{R}^N}(2_s^*-1)\varepsilon(|u_n-u|^{2_s^*-1}+|u|^{2_s^*-1})|u_n-u|\mathrm{d}x\leqslant\\&2c_0(|u_n-u|_2^2+|u|_2|u_n-u|_2)+2^qc(\varepsilon)(|u_n-u|_{q+1}^{q+1}+|u|_{q+1}^{\frac{q}{q+1}}|u_n-u|_{q+1})+\\&2^{2_s^*-1}\varepsilon\left(|u_n-u|_{2_s^*}^{2_s^*}+|u|_{2_s^*}^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*}}|u_n-u|_{2_s^*}\right)\leqslant\varepsilon c+o_n(1)\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，这意味着

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x,u_n)-f(x,u)||u_n-u|\mathrm{d}x\to0\tag{15}$$

结合(13),(14) 及(15) 式，我们可得 $\|u_n-u\|^2\to0$

引理 3[11]　设 X 为无限维 Banach 空间，$X=Y\oplus Z$，其中 Y 为有限维的. 若对于任意 c 都有 $I\in C^1(E,\mathbb{R})$ 满足$(C_e)_c$ 条件，并且：

(I_1) $I(0)=0$，$I(-u)=I(u)(\forall u\in X)$；

(I_2) 存在常数 $\rho,\alpha>0$，使得 $I|_{\partial B_\rho\cap Z}\geqslant\alpha>0$；

(I_3) 对任意有限维子空间 $\widetilde{X}\subset X$，存在 $R=R(\widetilde{X})>0$，使得在 $\widetilde{X}\backslash\partial B_R$ 上有 $I(u)\leqslant0$.

则 I 有一列临界值趋于 ∞ 的序列.

设$\{e_i\}$ 为 E 上的标准正交基，定义 $X_i=\mathbb{R}e_i$，记：

$$Y_k=\bigoplus_{i=1}^{k}X_i\qquad Z_k=\bigoplus_{i\geqslant k}X_i\qquad k\in\mathbb{Z}$$

那么 $E=Y_k\oplus Z_k$，且 Y_k 为有限维空间.

引理 4　若条件(V_1),(V_2),(f_1) 及(f_2) 成立，那么存在常数 $\rho,\alpha>0$，使得 $I|_{\partial B_\rho\cap Z_m}\geqslant\alpha>0$.

证　由文献[6] 中的引理 3.2 可得

$$\alpha_k=\sup_{u\in Z_k,\ \|u\|=1}\|u\|_p\to0\tag{16}$$

于是可以选择一个正整数 $m\geqslant1$，使得

$$|u|_2^2\leqslant\frac{1}{2c_0}\|u\|^2\qquad\forall u\in Z_m\tag{17}$$

对于 $u\in Z_m$，由(2),(4) 和(17) 式可得

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac12\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac12\|u\|^2-\frac{c_0}{2}|u|_2^2-\frac{c_\varepsilon}{q+1}|u|_{q+1}^{q+1}-\frac{\varepsilon}{2_s^*}|u|_{2_s^*}^{2_s^*}\geqslant\\&\frac14\|u\|^2-\frac{c_\varepsilon}{q+1}r_{q+1}^{q+1}\|u\|^{q+1}-\frac{\varepsilon}{2_s^*}r_{2_s^*}^{2_s^*}\|u\|^{2_s^*}\end{aligned}$$

取 $\|u\|=\rho$(ρ 充分小) 时，$I(u)\geqslant\alpha>0$，其中 $\alpha=\dfrac14\rho^2-\dfrac{c_\varepsilon}{q+1}r_{q+1}^{q+1}\rho^{q+1}-\dfrac{\varepsilon}{2_s^*}r_{2_s^*}^{2_s^*}\rho^{2_s^*}$.

引理 5　若条件(V_1)，(V_2)，$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$ 成立，对于任意有限维子空间 $\widetilde{E}\subset E$，存在 $R=R(\widetilde{E})>0$，使得在 $\widetilde{E}\backslash\partial B_R$ 上有 $I(u)\leqslant0$.

证　只需证 I 在 $\widetilde{E}$ 中是反强制的，可用反证法证明. 假设存在序列$\{u_n\}\subset\widetilde{E}$，当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n\|\to\infty$，且存在 $M>0$ 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $I(u_n)\geqslant-M$. 设 $v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，那么 $\|v_n\|=1$. 从而存在子列，不妨设

为$\{v_n\}$，我们可以假设在E中$v_n \rightharpoonup v_1$. 因为$\tilde{E}$是有限维的，那么在$\tilde{E}$中$v_n \to v_1$；在$\mathbb{R}^N$中$v_n \to v_1$几乎处处成立，且$\|v_1\| = 1$. 利用与(11)式类似的方法可得出矛盾.

定理1的证明　设$X = E$，$Y = Y_m$，$Z = Z_m$. 由引理2可知I满足$(C_e)_c$条件，又由引理4和引理5可知，引理3的条件全是满足的. 因此由引理3可得方程(1)有无穷多个大解.

参考文献：

[1] NEZZA E D, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bull Sci Math, 2012, 136(5): 521-573.

[2] AUTUORI G, PUCCI P. Elliptic Problems Involving the Fractional Laplacian in $\mathbb{R}^N$ [J]. J Differ Equ, 2013, 255(8): 2340-2362.

[3] 宋树枝，陈尚杰. 分数阶椭圆方程近共振问题解的多重性[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(10)：95-102.

[4] 王德菊，唐春雷，吴行平. 一类区域分数阶Schrödinger方程的基态解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(6)：21-26.

[5] GE B. Multiple Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian [J]. Nonlinear Anal, 2016, 30(8): 236-247.

[6] TENG K M. Multiple Solutions for a Class of Fractional Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Anal, 2015, 21(21): 76-86.

[7] AMBROSIO V. Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Fractional Schrödinger Equations Via Penalization Method [J]. Ann Mat Pura Appl, 2017, 196(4): 1-20.

[8] ZHANG W, TANG X H, ZHANG J. Infinitely Many Radial and Non-Radial Solutions for a Fractional Schrödinger Equation [J]. Comput Math Appl, 2016, 71(3): 737-747.

[9] DU X S, MAO A M. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Class of Semilinear Fractional Schrödinger Equations [J]. J Funct Spaces, 2017, 2017(4): 1-7.

[10] 张　维，唐春雷. 一类次线性分数阶Schrödinger方程的无穷多解[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(6)：78-83.

[11] RABINOWITZ P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1986: 1-100.

[12] KE X F, TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions to Semilinear Elliptic Equation with Nonlinear Term of Superlinear and Subcritical Growth [J]. Electron J Differential Equations, 2018, 2018(88): 1-17.

On Variational Results for of Fractional Schrödinger Type Equations with Superlinear Groth

CHEN　Wei,　TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: This paper considers the fractional Schrödinger type equations with superlinear growth. Under certain assumptions on nonlinear f with more general subcritical growth conditions, we have obtained the existence of infinitely many nontrivial high energy solutions via the Symmetric mountain pass lemma and the variational method. Thus enriching and improving the existing results.

Key words: fractional Schrödinger equation; general subcritical; superlinear; symmetric mountain pass lemma

责任编辑　廖　坤