

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.007

Banach 格上的无界绝对弱收敛的 弱* Dunford-Pettis 算子^①

刘春雷, 陈滋利, 陈金喜

西南交通大学 数学学院, 成都 611756

摘要: 为进一步研究 Banach 格上算子的性质, 首先, 给出无界绝对弱收敛的弱* Dunford-Pettis 算子的定义. 其次, 通过构造不交序列, 探究无界绝对弱收敛的弱* Dunford-Pettis 算子的等价刻画和控制性, 并获得了相关推论. 最后, 研究了该算子与弱* Dunford-Pettis 算子、极限算子和紧算子间的关系.

关键词: 无界绝对弱收敛的弱* Dunford-Pettis 算子; 正算子; 不交列; 弱* 序列连续格运算

中图分类号: O177

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2019)04-0031-06

近年来, 在 Banach 格及其算子理论的研究中, 算子所在空间的性质和算子本身的性质的讨论成为热点. 文献[1]提出了弱* Dunford-Pettis 算子的定义, 并探究了弱* Dunford-Pettis 算子与序极限算子、极限算子间的相互关系. 文献[2]在研究非紧算子的测度时, 提出无界收敛性可以作为研究非紧算子测度的工具. 文献[3]研究了无界范数收敛的性质, 并探究了无界范数收敛与其它收敛的关系. 文献[4]提出了无界绝对弱收敛的定义, 并探究了无界绝对弱收敛和弱收敛之间的关系. 文献[5]提出了无界绝对弱收敛的 Dunford-Pettis 算子, 简称 uaw-Dunford-Pettis 算子.

本文结合无界绝对弱收敛性和弱* Dunford-Pettis 算子的概念, 提出一类定义在 Banach 格上的新算子——无界绝对弱收敛的弱* Dunford-Pettis 算子, 简称 uaw-w* Dunford-Pettis 算子. 通过构造不交列, 探究 uaw-w* Dunford-Pettis 算子的等价刻画和控制性, 并获得相关推论. 最后, 研究该算子与相关算子之间的关系.

文中算子 $T: E \rightarrow F$ 代表全体有界线性算子, E, F 表示 Banach 格, 并用 E' 和 F' 分别表示 E 和 F 的共轭空间, 算子 $T: E \rightarrow F$ 的共轭算子为 $T': F' \rightarrow E'$. 算子 T 与其共轭算子之间满足如下关系:

$$T'(fx) = f(Tx)$$

其中 $x \in E, f \in F'$.

在赋范空间 X 中, $\{x_n\} \subset X$, 如果对任意的 $x' \in X'$ (X 的共轭空间记为 X'), 有 $x'(x_n) \rightarrow x'(x)$, 那么称 x_n 弱收敛到 x , 记作 $x_n \xrightarrow{w} x$; 同理, $\{x'_n\} \subset X'$, 如果对任意的 $x \in X$, 有 $x'_n(x) \rightarrow x'(x)$, 则称 x'_n 弱* 收敛到 x' , 记作 $x'_n \xrightarrow{w^*} x'$ [6]. $\{x_n\} \subset E$, 如果对任意的 $\mu \in E^+$, 有 $(\|x_n - x\| \wedge \mu) \xrightarrow{w} 0$, 则称 x_n 无界绝对弱收敛到 x , 记作 $x_n \xrightarrow{uaw} x$ [4]. Banach 格 E 具有弱序列连续格运算是指: 对 E 中任意的弱收敛到 0 的序列 $\{x_n\}$, 都有 $\{\|x_n\|\}$ 弱收敛到 0. Banach 格 E' 具有弱* 序列连续格运算是指: 对 E' 中任意弱* 收敛到

① 收稿日期: 2018-05-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701479).

作者简介: 刘春雷(1992-), 男, 硕士研究生, 主要从事泛函分析与线性算子理论的研究.

通信作者: 陈滋利, 教授.

0 的序列 $\{f_n\}$, 都有 $\{|f_n|\}$ 弱* 收敛到 0^[6].

其它未解释的有关 Banach 格和算子理论的术语及符号详见文献[6—7].

1 无界绝对弱收敛的弱* Dunford-Pettis 算子

定义 1 设 E, F 是 Banach 格, 算子 $T: E \rightarrow F$ 是从 E 到 F 的有界线性算子. 如果对 E 中任意的范数有界的无界绝对弱收敛到 0 的序列 $\{x_n\}$ 和 F' 中任意的弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\}$, 有 $f_n(T(x_n)) \rightarrow 0$ 成立, 则称 T 为无界绝对弱收敛的弱* Dunford-Pettis 算子, 简称 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

下面通过构造不交列, 给出 uaw-w* Dunford-Pettis 算子的等价刻画.

定理 1 设 $T: E \rightarrow F$ 是从 Banach 格 E 到 Banach 格 F 的正算子, 若 F' 具有弱* 序列连续格运算, 则下列结论等价:

(i) T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子;

(ii) 对任意的范数有界的不交序列 $\{x_n\} \subset E^+$ 和任意的弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset (F')^+$, 有 $f_n(T(x_n)) \rightarrow 0$.

证 (i) \Rightarrow (ii). 由文献[4]中引理 2 知, 不交列是无界绝对弱收敛到 0 的序列. 结合定义 1, 则(i) \Rightarrow (ii) 显然成立.

(ii) \Rightarrow (i). 如果(i) 不成立, 则存在范数有界的无界绝对弱收敛到 0 的序列 $\{x_n\} \subset E$ 和弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset F'$, 使得 $f_n(T(x_n)) \not\rightarrow 0$. 不妨认为存在 $\epsilon' > 0$ 和 $\{f_n(T(x_n))\}$ 的子列(不妨仍记为 $\{f_n(T(x_n))\}$), 有

$$(T' | f_n |)(|x_n|) \geq |T' f_n|(|x_n|) \geq |(T' f_n)(x_n)| \geq \epsilon'$$

由于 $f_n \xrightarrow{\omega^*} 0$, F' 具有弱* 序列连续格运算, 则 $|f_n| \xrightarrow{\omega^*} 0$, $T' |f_n| \xrightarrow{\omega^*} 0$. 则存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{y_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{g_n\}$, 对任意的 $n \geq 1$, 满足

$$T' |g_n|(|y_n|) \geq \epsilon'$$

和

$$(T' |g_{n+1}|)(4^n \sum_{i=1}^n |y_i|) < \frac{1}{n}$$

由文献[6]中定理 4.35 知, 可以构造不交列

$$z_{n+1} = \left(|y_{n+1}| - 4^n \sum_{i=1}^n |y_i| - 2^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |y_i| \right)^+$$

由文献[4]的引理 2 知, $z_{n+1} \xrightarrow{uaw} 0$, 并且

$$\begin{aligned} T'(|g_{n+1}|)(z_{n+1}) &= T'(|g_{n+1}|) \left(|y_{n+1}| - 4^n \sum_{i=1}^n |y_i| - 2^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |y_i| \right)^+ \geq \\ &T'(|g_{n+1}|) \left(|y_{n+1}| - 4^n \sum_{i=1}^n |y_i| - 2^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |y_i| \right) \geq \\ &\epsilon' - \frac{1}{n} - T'(|g_{n+1}|) \left(2^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |y_i| \right) \end{aligned}$$

对于充分大的 n , 有:

$$|g_{n+1}|(T(z_{n+1})) = T' |g_{n+1}|(z_{n+1}) > \frac{\epsilon'}{2}$$

由于范数有界且不交的序列 $\{z_{n+1}\} \subset E^+$, $\{|g_{n+1}|\} \subset (F')^+$ 且 $|g_{n+1}| \xrightarrow{\omega^*} 0$, 这与(ii) 矛盾, 所以(ii) \Rightarrow (i) 成立.

文献[6]和文献[8]分别提出了 Dunford-Pettis 算子和弱* Dunford-Pettis 算子在一定条件下满足控制性. 而 uaw-w* Dunford-Pettis 算子是否满足控制性呢?由定理 1 可以得出 uaw-w* Dunford-Pettis 算子在一定条件下也是满足控制性的.

推论 1 设 E, F 是 Banach 格, F' 具有弱* 序列连续格运算, $S, T: E \longrightarrow F$ 是两个正算子且满足 $0 \leq S \leq T$. 如果 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 那么 S 也是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

证 设范数有界的不交列 $\{x_n\} \subset E^+$ 和弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset (F')^+$. 由于 T 是正的 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 且满足 $0 \leq S \leq T$, 所以

$$0 \leq f_n(S(x_n)) \leq f_n(T(x_n)) \rightarrow 0$$

由定理 1 得, S 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

由定义 1 可知, 当 $T: E \longrightarrow F$ 是正的 uaw-w* Dunford-Pettis 算子时, 对任意范数有界的不交序列 $\{x_n\} \subset E^+$ 和任意弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset F'$, 有 $f_n(T(x_n)) \rightarrow 0$. 事实上, 当 E' 具有序连续范数且 F 是 σ -Dedekind 完备时, 可以得到下面定理:

定理 2 设 $T: E \longrightarrow F$ 是从 Banach 格 E 到 Banach 格 F 的正算子, E' 具有序连续范数且 F 是 σ -Dedekind 完备的. 如果 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 那么对任意的范数有界不交序列 $\{x_n\} \subset E^+$ 和任意的弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset F'$, 可得

$$|f_n|(T(x_n)) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

证 设 $\{x_n\}$ 是 E^+ 中任意的范数有界不交序列, $\{f_n\}$ 是 F' 中任意的弱* 收敛到 0 的序列. 假设对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $0 \leq h \in F'$ 和 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$(|f_n| - h)^+(Tx_n) < \epsilon \quad (1)$$

如果(1)式不成立, 通过反证法可得, 存在 $\epsilon' > 0$, 对任意 $h \in F'$ 和任意的 $N \in \mathbb{N}$, 至少存在一个 k ($k > N$), 有

$$(|f_k| - h)^+(Tx_k) \geq \epsilon'$$

取 $h = 4|f_1|$ 和 $n_1 = 1$, 则存在 $n_2 > n_1$, 使得

$$(|f_{n_2}| - 4|f_{n_1}|)^+(Tx_{n_2}) \geq \epsilon'$$

取 $h = 4^2 \sum_{i=1}^2 |f_{n_i}|$, 则存在 $n_3 > n_2$, 使得

$$\left(|f_{n_3}| - 4^2 \sum_{i=1}^2 |f_{n_i}|\right)^+(Tx_{n_3}) \geq \epsilon'$$

由此类推, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在递增子列 $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, 使得

$$\left(|f_{n_{k+1}}| - 4^k \sum_{i=1}^k |f_{n_i}|\right)^+(Tx_{n_{k+1}}) \geq \epsilon'$$

设:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |f_{n_k}| \quad h_{k+1} = \left(|f_{n_{k+1}}| - 4^k \sum_{i=1}^k |f_{n_i}|\right)^+$$

通过文献[6]中定理 4.35 知, 可以构造不交列

$$j_{k+1} = \left(|f_{n_{k+1}}| - 4^k \sum_{i=1}^k |f_{n_i}| - 2^{-k} f\right)^+$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$0 \leq h_{k+1} \leq j_{k+1} + 2^{-k} f$$

和

$$h_{k+1}(Tx_{n_{k+1}}) \geq \epsilon'$$

因为 $0 \leq j_{k+1} \leq |f_{n_{k+1}}|$, 且 $f_{n_{k+1}} \xrightarrow{\omega^*} 0$, 通过文献[9]中引理 2.2 知, $j_{k+1} \xrightarrow{\omega^*} 0$ ($j_{k+1} \in F'$). 由于 $\{x_n\}$ 是 E^+ 中范数有界的不交序列, 由文献[4]中引理 2 知, $x_n \xrightarrow{uaw} 0$. T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 所以 $j_{k+1}(Tx_{n_{k+1}}) \rightarrow 0$. 对充分大的 k , 就有

$$0 < \epsilon' \leq h_{k+1}(Tx_{n_{k+1}}) \leq (j_{k+1} + 2^{-k} f)(Tx_{n_{k+1}}) = j_{k+1}(Tx_{n_{k+1}}) + 2^{-k} f(Tx_{n_{k+1}}) \rightarrow 0$$

矛盾, 所以(1)式成立.

设 $0 \leq h \in F'$, 当 $n > N$ ($N \in \mathbb{N}$) 时, h 满足(1)式. 则

$$|f_n|(Tx_n) \leq (|f_n| - h)^+(Tx_n) + h(Tx_n) \leq \varepsilon + h(Tx_n)$$

因为 $\{x_n\}$ 是范数有界的不交列, 且 E' 具有序连续范数, 根据文献[7]中定理 2.4.14 可知 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 所以 $(T'h)(x_n) \rightarrow 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n|(Tx_n) \leq \varepsilon$. 又由于 ε 是任取的, 所以 $|f_n|(Tx_n) \rightarrow 0$.

2 无界绝对弱收敛的弱* Dunford-Pettis 算子与相关算子间的关系

在文献[6]给出了 Dunford-Pettis 算子定义的基础上, 文献[5]定义了一类新算子——无界绝对弱收敛的 Dunford-Pettis 算子, 即: 设 E 是 Banach 格, X 是 Banach 空间, $T: E \rightarrow X$, 如果对任意的范数有界的无界绝对弱收敛到 0 的序列 $\{x_n\} \subset E$, 有 $\|Tx_n\| \rightarrow 0$, 则称 T 是无界绝对弱收敛的 Dunford-Pettis 算子, 简称 uaw-Dunford-Pettis 算子.

uaw-Dunford-Pettis 算子显然是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 但反过来却不一定成立. 下面给出其反例.

例 1 设 $T: l_1 \rightarrow L_2[0, 1]$, 定义为

$$T((\lambda_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) \chi_{[0, 1]}$$

对所有的 $(\lambda_n) \in l_1$, 其中 $\chi_{[0, 1]}$ 表示 $[0, 1]$ 上的特征函数. 由于 T 是有限秩算子, 所以 T 是紧算子, 显然 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子. 考虑由 l_1 的标准基 $\{e_n\}$ 构成的范数有界的无界绝对弱收敛到 0 的序列, 但 $\|Te_n\| \not\rightarrow 0$, 所以 T 不是 uaw-Dunford-Pettis 算子.

下面的命题讨论 uaw-w* Dunford-Pettis 算子与 uaw-Dunford-Pettis 算子以及 Dunford-Pettis 算子的合成关系.

命题 1 设 E, F, G 是 Banach 格, 则下列结论成立:

(i) 如果 $S: E \rightarrow F$ 是 uaw-Dunford-Pettis 算子, 那么对任意的 uaw-w* Dunford-Pettis 算子 $T: F \rightarrow G$, TS 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子;

(ii) 如果 $S: E \rightarrow F$ 是 Dunford-Pettis 算子, 那么对任意的 uaw-w* Dunford-Pettis 算子 $T: F \rightarrow G$, TS 是弱* Dunford-Pettis 算子.

证 (i) 设任意的范数有界序列 $\{x_n\} \subset E$ 且 $x_n \xrightarrow{uaw} 0$, 以及任意的弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset G'$. 因为 S 是 uaw-Dunford-Pettis 算子, 所以 $\|S(x_n)\| \rightarrow 0$, 故 $S(x_n) \xrightarrow{uaw} 0$. 由于 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 所以 $f_n(T(Sx_n)) \rightarrow 0$, 故 TS 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

(ii) 设任意的弱收敛到 0 的序列 $\{x_n\} \subset E$ 和任意的弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset G'$. 因为 T 是 Dunford-Pettis 算子, 所以 $\|S(x_n)\| \rightarrow 0$, 故 $S(x_n) \xrightarrow{uaw} 0$. 由于 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 所以 $f_n(T(Sx_n)) \rightarrow 0$, 故 TS 是弱* Dunford-Pettis 算子.

接下来给出弱* Dunford-Pettis 算子和 uaw-w* Dunford-Pettis 算子间的关系.

定理 3 设 E, F 是 Banach 格, 算子 $T: E \rightarrow F$, 则下面结论成立:

(i) T 是弱* Dunford-Pettis 算子, 如果 Banach 格 E' 具有序连续范数, 那么 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子;

(ii) T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 如果 E 具有弱序连续格运算, 那么 T 是弱* Dunford-Pettis 算子.

证 (i) 设任意的范数有界序列 $\{x_n\} \subset E$ 且 $x_n \xrightarrow{uaw} 0$, 由于 E' 具有序连续范数, 则由文献[4]中定理 7 知 $x_n \xrightarrow{w} 0$. 因为 T 是弱* Dunford-Pettis 算子, 且 $\{f_n\}$ 是 F' 中任意的弱* 收敛到 0 的序列, 所以 $f_n(T(x_n)) \rightarrow 0$, 证得 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

(ii) 设弱收敛到 0 的序列 $\{x_n\} \subset E$ 和弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset F'$. 因为 E 具有弱序连续格运算, 所以 $|x_n| \xrightarrow{w} 0$. 又因为 $0 \leq |x_n| \wedge \mu \leq |x_n| \xrightarrow{w} 0$, 所以 $(|x_n| \wedge \mu) \xrightarrow{w} 0$, 也即是 $x_n \xrightarrow{uaw} 0$. 由于 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 所以 $f_n(T(x_n)) \rightarrow 0$, 证得 T 是弱* Dunford-Pettis 算子.

注 1 上述 E' 具有序连续范数是必要的. 例如: l_1 上的恒等算子: $Id_{l_1}: l_1 \longrightarrow l_1$, Id_{l_1} 是弱* Dunford-Pettis 算子. 因为 l_1 的标准单位向量 $\{e_n\}$ 是不交的, 所以 $e_n \xrightarrow{uaw} 0$. l_∞ 的标准单位向量 $\{e'_n\}$ 是不交的, 且 l_1 序连续, 根据文献[7]的推论 2.4.3 知: $e'_n \xrightarrow{w^*} 0$. 但 $e'_n(e_n) \not\xrightarrow{w^*} 0$, 所以 Id_{l_1} 不是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

根据文献[7]中性质 2.5.23 知, 离散且具有序连续范数的 Banach 格具有弱序列连续格运算. 结合定理 3(ii), 可得下面的推论:

推论 2 设 E, F 是 Banach 格, E 离散且具有序连续范数. 如果 $T: E \longrightarrow F$ 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 那么 T 是弱* Dunford-Pettis 算子.

现在有一个很自然的问题, 在何种情况下 uaw-w* Dunford-Pettis 算子与弱* Dunford-Pettis 算子等价? 我们知道: AM 空间具有弱序列连续格运算, 并且其共轭空间(AL 空间)具有序连续范数, 结合定理 3, 不难发现当 E 是 AM 空间时, 其上的 uaw-w* Dunford-Pettis 算子与弱* Dunford-Pettis 算子等价.

文献[10]给出了极限算子的定义, 文献[1]提出极限算子是弱* Dunford-Pettis 算子. 接下来探究 uaw-w* Dunford-Pettis 算子与极限算子的关系.

命题 2 设 E, F 是 Banach 格, 如果算子 $T: E \longrightarrow F$ 是极限算子, 那么 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

证 设任意的范数有界的无界绝对弱收敛到 0 的序列 $\{x_n\} \subset E$ 和任意的弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset F'$. 因为 T 是极限算子, 所以 $\|T'f_n\| \rightarrow 0$.

由于 $\{x_n\}$ 是范数有界序列, 所以存在 $\alpha > 0$, 使得 $\|x_n\| \leq \alpha$. 由于

$$|f_n(T(x_n))| = |(T'f_n)(x_n)| \leq \alpha \|T'f_n\| \rightarrow 0$$

即 $f_n(T(x_n)) \rightarrow 0$. 证得 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

Banach 格上的极限算子显然是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 但反过来却不一定成立. 例如 l_∞ 上的恒等算子 $Id_{l_\infty}: l_\infty \longrightarrow l_\infty$, 由于 l_∞ 具有 DP* 性质, 所以恒等算子 Id_{l_∞} 是弱* Dunford-Pettis 算子^[1]. 而 l_∞ 是 AM 空间, 所以 Id_{l_∞} 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 但 l_∞ 的闭单位球不是极限集, 所以 Id_{l_∞} 不是极限算子.

下面定理给出空间满足一定条件时, uaw-w* Dunford-Pettis 算子是极限算子.

定理 4 设 E, F 是 Banach 格, 算子 $T: E \longrightarrow F$ 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子. 如果 E' 具有弱* 序列连续格运算, 那么 T 是极限算子.

证 设范数有界的不交序列 $\{x_n\} \subset E$ 和弱* 收敛到 0 的序列 $\{f_n\} \subset F'$. 由文献[4]中引理 2 知 $x_n \xrightarrow{uaw} 0$. 因为 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 所以

$$(T'f_n)(x_n) = f_n(T(x_n)) \rightarrow 0 \quad (2)$$

因为 $f_n \xrightarrow{w^*} 0$, 所以 $T'f_n \xrightarrow{w^*} 0$. 又因为 E' 具有弱* 序列连续格运算, 所以

$$\|T'f_n\| \xrightarrow{w^*} 0 \quad (3)$$

综合(2)和(3)式, 根据文献[11]中推论 2.7 可得 $\|T'f_n\| \rightarrow 0$. 证得 T 是极限算子.

紧算子显然是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子, 但通过下面例子不难发现 uaw-w* Dunford-Pettis 算子却不一定是紧算子.

例 2 算子 $T: C[0, 1] \longrightarrow c_0$, 定义为

$$T(x) = \left(\int_0^1 x(t) \sin t dt, \int_0^1 x(t) \sin 2t dt, \dots \right)$$

对每个 $x \in C[0, 1]$. 根据文献[6]知 T 不是紧算子. 令 $x_n \in C[0, 1]$, 且 $\{x_n\}$ 是范数有界的无界绝对弱收敛到 0 的序列. 由文献[4]中定理 7 知:

$$x_n \xrightarrow{w} 0 \quad \|T(x_n)\| = \sup_{m \geq 1} \left| \int_0^1 x_n(t) \sin mt dt \right| \rightarrow 0$$

因此 T 是 uaw-Dunford-Pettis 算子, 故 T 是 uaw-w* Dunford-Pettis 算子.

由文献[12]中定理 4.5 知, 当 Banach 格 E 具有序连续范数时, 值域空间在 E 上的紧算子与极限算子等价. 结合定理 4 可得出下面推论:

推论 3 设 $T: E \rightarrow F$ 是 $uaw-w^*$ Dunford-Pettis 算子, 且 E' 具有弱* 序列连续格运算. 如果 F 具有序连续范数, 则 T 是紧算子.

参考文献:

- [1] H'MICHANE J, KADDOURI A E, BOURAS K. On the Class of Limited Operators [J]. Acta Mathematica Universitatis Comeniana, 2016, 85(2): 191-196.
- [2] TROITSKY V G. Measures of Non-Compactness of Operators on Banach Lattices [J]. Positivity, 2004, 8(2): 165-178.
- [3] DENG Y, BRIEN M O, TROITSKY V G. Unbounded Norm Convergence in Banach Lattices [J]. Positivity, 2017, 21(3): 963-974.
- [4] ZABETI O. Unbounded Absolute Weak Convergence in Banach Lattices [J]. Positivity, 2018, 22(2): 501-505.
- [5] ERKURSUN N, GEZER N A, ZABETI O. Unbounded Absolute Weak Dunford-Pettis and Unbounded Absolute Weak Compact Operators [J]. Functional Analysis, 2017(8): 1-7.
- [6] ALIPRANTIS C D, BURKINSHAW O. Positive Operators [M]. Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.
- [7] MEYER-NIEBERG P. Banach Lattices [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [8] CHEN J X, CHEN Z L, JI G X. Domination by Positive Weak* Dunford-Pettis Operators on Banach Lattices [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2014, 90(2): 311-318.
- [9] CHEN J X, CHEN Z L, JI G X. Almost Limited Sets in Banach Lattices [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 412(1): 547-553.
- [10] BOURGAIN J, DIESTEL J. Limited Operators and Strict Cosingularity [J]. Mathematische Nachrichten, 1984, 119(1): 55-58.
- [11] DODDS P G, FREMLIN D H. Compact Operators in Banach Lattices [J]. Israel Journal of Mathematics, 1979, 34(4): 287-320.
- [12] WNUK W. Banach Lattices with Order Continuous Norms [M]. Warszawa: Polish Scientific Publishers PWN, 1999.

Uaw- w^* Dunford-Pettis Operators on Banach lattices

LIU Chun-lei, CHEN Zi-li, CHEN Jin-xi

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract: For the further study of the property of operators on Banach lattices, firstly, we give the definition of $uaw-w^*$ Dunford-Pettis operator. Secondly, by constructing the disjoint sequence, we explore the equivalent characterization and domination property of $uaw-w^*$ Dunford-Pettis operator, and relevant inferences are achieved. Finally, we study the relationships between $uaw-w^*$ Dunford-Pettis operator and weak* Dunford-Pettis operator, limit operator and compact operator.

Key words: $uaw-w^*$ Dunford-Pettis operator; positive operator; disjoint sequence; weakly* sequentially continuous lattice operations