第 44 卷　第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 4 月
Vol. 44　No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.008

具有 Hardy 位势和临界指数的 Kirchhoff 型方程的正解[①]

柳　鸠，　严忠权

黔南民族师范学院 数学与统计学院，复杂系统与计算智能重点实验室，贵州 都匀 558000

摘要： 根据全空间中半线性椭圆方程的结果，利用伸缩讨论、分析技巧和一些精细的计算，给出了一类具有 Hardy 位势和临界指数的 Kirchhoff 型方程的正解.

关　键　词： Kirchhoff 型方程；Hardy 位势；伸缩讨论；正解

中图分类号： O177.91　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2019)04-0037-04

考虑如下 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u + V(x)u = u^5 & x\in\mathbb{R}^3 \\ u>0 & u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a>0$，$b>0$，并且 $V(x)=-\dfrac{\gamma}{|x|^2}$ 是 Hardy 位势.

如果 $V\in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$，结合一些其它的假设，文献[1]得到了方程(1)的基态解，文献[2]得到了方程(1)的束缚态解. 但 Hardy 位势 V 显然不属于 $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$，因此本文将在这一位势条件下考虑方程(1)的解的存在性. 对 Kirchhoff 型方程其它的一些结果请参见文献[3-9].

当 $a=1$，$b=0$ 并且 $\gamma=\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$时，方程(1)退化到下列半线性椭圆方程：

$$\begin{cases} -\Delta u-\dfrac{\lambda}{|x|^2}u=u^5 & x\in\mathbb{R}^3 \\ u>0 & u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{2}$$

对任意的 $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$，文献[10-11]得出方程(2)的所有正解构成下列集合

$$Z_\lambda=\left\{w_\mu^\lambda(x)=\mu^{-\frac{1}{2}}w^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\mu}\right):\mu>0\right\}$$

其中：

$$w^{(\lambda)}(x)=\frac{3^{\frac{1}{4}}\upsilon_\lambda^{\frac{1}{2}}}{\left[|x|^{1-\upsilon_\lambda}(1+|x|^{2\upsilon_\lambda})\right]^{\frac{1}{2}}}\qquad \upsilon_\lambda=(1-4\lambda)^{\frac{1}{2}}$$

特别地，$w^{(0)}(x)$ 是最佳 Sobolev 嵌入常数

---

① 收稿日期：2018-07-09
基金项目：国家自然科学基金项目(11861052)；黔南民族师范学院项目(QNSY2018BS014，QNYSKYTD2018012，QNSYRC201621，QNSYK201606).
作者简介：柳　鸠(1982-)，男，副教授，主要从事非线性分析的研究.

$$S=\inf_{0\neq u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}\frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}$$

的达到函数[12]. 对任意的 $w_\mu^\lambda(x)\in Z_\lambda$，由本文中引理1知

$$\alpha_\lambda=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w_\mu^\lambda(x)|^2\mathrm{d}x=\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\pi^2 \tag{3}$$

事实上，由(3)式得出

$$S=\alpha_0^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3\sqrt{3}\pi^2}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{4}$$

为了得到方程(1)的正解，首先考虑下列方程：

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u-\dfrac{A_{a,b,\lambda}}{|x|^2}u=u^5 & x\in\mathbb{R}^3\\ u>0 & u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\end{cases} \tag{5}$$

其中 $a>0$，$b>0$，并且

$$A_{a,b,\lambda}=\frac{\lambda(2a+b^2\alpha_\lambda^2+b\alpha_\lambda\sqrt{b^2\alpha_\lambda^2+4a})}{2} \tag{6}$$

设

$$T=\frac{\sqrt{b^2\alpha_\lambda^2+4a}-b\alpha_\lambda}{2a} \tag{7}$$

利用伸缩讨论，得到下面定理：

定理1 假设 $a>0$，$b>0$，并且 $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$，那么对任意的 $w_\mu^\lambda(x)\in Z_\lambda$，$w_\mu^\lambda(Tx)$ 是方程(5)的正解.

利用定理1，我们得出本文的主要结果：

定理2 假设 $a>0$，$b>0$，并且 $\gamma\in(0,A_{a,b,\frac{1}{4}})$，那么存在 $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$，使得 $\gamma=A_{a,b,\lambda}$，并且对任意的 $w_\mu^\lambda(x)\in Z_\lambda$，$w_\mu^\lambda(Tx)$ 是方程(1)的正解.

注1 通过计算，由(3),(4)和(6)式知

$$A_{a,b,\frac{1}{4}}=\frac{9a+2b^2S^3+2bS^{\frac{3}{2}}\sqrt{b^2S^3+9a}}{36}$$

注2 定理2补充了文献[1-2]的结果.

引理1 对任意的 $w_\mu^\lambda(x)\in Z_\lambda$，(3)式成立.

证 对任意的 $w_\mu^\lambda(x)\in Z_\lambda$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w_\mu^\lambda(x)|^2\mathrm{d}x=&\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w^{(\lambda)}(x)|^2\mathrm{d}x=\\ &\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\frac{3^{\frac{1}{4}}\upsilon_\lambda^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1-\upsilon_\lambda}{2}}(1+|x|^{2\upsilon_\lambda})^{\frac{1}{2}}}\right|^2\mathrm{d}x=\\ &\frac{\sqrt{3}}{4}\upsilon_\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{[(1-\upsilon_\lambda)|x|^{-\upsilon_\lambda}+(1+\upsilon_\lambda)|x|^{\upsilon_\lambda}]^2}{(|x|^{1-\upsilon_\lambda}+|x|^{1+\upsilon_\lambda})^3}\mathrm{d}x=\\ &\sqrt{3}\pi\upsilon_\lambda\int_0^{+\infty}\frac{[(1-\upsilon_\lambda)r^{1-\upsilon_\lambda}+(1+\upsilon_\lambda)r^{1+\upsilon_\lambda}]^2}{(r^{1-\upsilon_\lambda}+r^{1+\upsilon_\lambda})^3}\mathrm{d}r=\\ &\sqrt{3}\pi\upsilon_\lambda\int_0^{+\infty}\frac{[(1-\upsilon_\lambda)+(1+\upsilon_\lambda)r^{2\upsilon_\lambda}]^2r^{\upsilon_\lambda-1}}{(1+r^{2\upsilon_\lambda})^3}\mathrm{d}r=\\ &\sqrt{3}\pi\int_0^{+\infty}\frac{[(1-\upsilon_\lambda)+(1+\upsilon_\lambda)t^2]^2}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t=\\ &\sqrt{3}\int_0^{+\infty}\left[\frac{(1+\upsilon_\lambda)^2}{1+t^2}-\frac{4\upsilon_\lambda(1+\upsilon_\lambda)}{(1+t^2)^2}+\frac{4\upsilon_\lambda^2}{(1+t^2)^3}\right]\mathrm{d}t=\end{aligned}$$

$$\sqrt{3}\pi\left[\frac{\pi(1+\upsilon_\lambda)^2}{2}-\upsilon_\lambda(1+\upsilon_\lambda)\pi+\frac{3\pi\upsilon_\lambda^2}{4}\right]=$$

$$\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\pi^2$$

由 3 维球坐标变换和下列积分公式

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^N}\mathrm{d}x=\frac{1}{2N-2}\left[\frac{x}{(1+x^2)^{N-1}}+(2N-3)\int\frac{1}{(1+x^2)^{N-1}}\mathrm{d}x\right]\qquad N\neq 1$$

因此(3) 式成立.

定理 1 的证明　设 $\omega(x)=w_\mu^\lambda(x)\in Z_\lambda$，那么

$$-\Delta\omega(x)-\frac{\lambda}{|x|^2}\omega(x)=\omega(x)^5$$

令 $u(x)=\omega(Tx)$，通过计算，我们有：

$$T^2=\frac{1}{a+bT^{-1}\|\omega(x)\|^2}\qquad\qquad \frac{\lambda}{T^2}=A_{a,b,\lambda}$$

其中 T 在(7) 式中被定义，并且

$$\|\cdot\|^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\cdot|^2\mathrm{d}x$$

因此我们得到

$$-\Delta u(x)=-T^2\Delta\omega(Tx)=T^2\left[\lambda\frac{\omega(Tx)}{|Tx|^2}+\omega(Tx)^5\right]=$$

$$T^2\left[\frac{\lambda}{T^2}\frac{u(x)}{|x|^2}+u(x)^5\right]=\frac{A_{a,b,\lambda}\dfrac{u(x)}{|x|^2}+u(x)^5}{a+bT^{-1}\|\omega(x)\|^2}=$$

$$\frac{A_{a,b,\lambda}\dfrac{u(x)}{|x|^2}+u(x)^5}{a+b\|u(x)\|^2}$$

这说明 u 是方程(5) 的正解.

定理 2 的证明　令 $f_{a,b}(\lambda)=A_{a,b,\lambda}$，那么 $f_{a,b}(0)=0$，并且

$$f_{a,b}(\lambda)=\frac{2a\lambda+b^2\lambda\alpha_\lambda^2+\sqrt{b^4\lambda^2\alpha_\lambda^4+4ab^2\lambda^2\alpha_\lambda^2}}{2}$$

因为关于 λ 的函数 $\lambda\alpha_\lambda^2$，$\lambda^2\alpha_\lambda^4$，$\lambda^2\alpha_\lambda^2$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 上都是单调递增的，所以 $f_{a,b}(\lambda)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 上是严格单调递增的. 因此对任意的 $\gamma\in(0,A_{a,b,\frac{1}{4}})$，存在唯一的 $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 使得 $\gamma=A_{a,b,\lambda}$. 由定理 1 知，$w_\mu^\lambda(Tx)$ 是方程(1) 的正解.

参考文献：

[1]　LIU J，LIU T，PAN H L. A Result on a Non-Autonomous Kirchhoff Type Equation Involving Critical Term [J]. Appl Math Lett，2018，85：82-87.

[2]　XIE Q L，MA S W，ZHANG X. Bound State Solutions of Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent [J]. J Differential Equations，2016，261(2)：890-924.

[3]　AZZOLLINI A. The Elliptic Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^N$ Perturbed by a Local Nonlinearity [J]. Differential Integral Equations，2012，25(5-6)：543-554.

[4]　AZZOLLINI A. A Note on the Elliptic Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^N$ Perturbed by a Local Nonlinearity [J]. Commun Contemp Math，2015，17(4)：1-5.

[5]　LIU J，LIAO J F，TANG C L. Positive Solutions for Kirchhoff-Type Equations with Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$ [J]. J Math Anal Appl，2015，429(2)：1153-1172.

[6]　LIU J，YAN Z Q，ZHENG Z B. A Result on a Class of Elliptic Equations Involving Kirchhoff Type Nonlocal Term [J].

Comput Math Appl, 2017, 73(2): 355-361.
[7] 刘选状, 吴行平, 唐春雷. 一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 54-59.
[8] 严忠权, 柳 鸠. 具有一般临界增长的自治的 Kirchhoff 型方程正基态解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(2): 32-35.
[9] 曾 兰, 唐春雷. 带有临界指数的 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 29-34.
[10] TERRACINI S. On Positive Entire Solutions to a Class of Equations with a Singular Coefficient and Critical Exponent [J]. Adv Differential Equations, 1996, 1(2): 241-264.
[11] FELLI V, TERRACINI S. Elliptic Equations with Multi-Singular Inverse-Square Potentials and Critical Nonlinearity [J]. Comm Partial Differential Equations, 2006, 31(1-3): 469-495.
[12] TALENTI G. Best Constant in Sobolev Inequality [J]. Ann Mat Pura Appl, 1976, 110(4): 353-372.

On Positive Solution for Kirchhoff Type Equation with the Hardy Potential and Critical Exponent

LIU Jiu, YAN Zhong-quan

Key Laboratory of Complex Systems and Intelligent Computing,
School of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun Guizhou 558000, China

Abstract: According to the results of the semilinear elliptic equation in the whole space, by using the rescaling argument, analysis skills and careful calculation, the positive solution for a Kirchhoff type equation with the Hardy potential and critical exponent is obtained.

Key words: Kirchhoff type equation; Hardy potential; rescaling argument; positive solution

责任编辑 廖 坤