DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.04.026

对多元函数最值问题的思考与教学探讨①

刘海东，　闵　啸

嘉兴学院 数理与信息工程学院，浙江 嘉兴 314001

摘要：多元函数的最值问题是高等数学课程的教学难点之一，众多教材重点讲解了如何计算多元函数的最值，而没有深入探究计算函数最值的前提：函数最值的存在性. 深入分析了经典教材中的几个实例，证明了这些问题的最小值(或最大值)是存在的，从而打消学生在学习过程中的疑虑，让学生更深刻地理解多元函数最值的存在性.

关　键　词：多元函数；最值；存在性

中图分类号：**G642**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2019)04-0157-04

近年来，受内容多、学时少等因素的影响，如何深入浅出地讲解高等数学课程中的重要知识点，已引起教师的普遍关注[1-4]. 众所周知，多元函数的最值在物理学、化学、最优控制、工程技术以及经济金融等领域有着广泛的应用，这部分内容的教学变得非常重要. 受限于课程学时的安排，教师对此无法深入讲解，导致学生在学习过程中不能深入理解.

1　教学中存在的问题

与一元函数类似，多元函数的最值问题涉及到两个方面：一方面是函数的最值是否存在；另一方面是当函数存在最值时，如何计算它的最值. 在教学过程中，教师往往侧重讲解如何计算多元函数的最值，而忽略了它的前提：函数最值的存在性. 关于函数最值的存在性，教材主要依据如下结论：有界闭域上的连续函数必有最小值和最大值. 假设多元函数 f 在有界闭域 D 上连续，在 D 内部可微并且仅有有限个驻点. 计算函数 f 最值的一般方法是[5]：将函数 f 在 D 内部的所有驻点处的函数值与 f 在 D 边界上的最值进行比较，其中最小的就是最小值，最大的就是最大值.

然而，解决实际问题并非这么简单. 原因之一是多元函数在区域内的驻点可能有无穷多个；原因之二是计算多元函数在区域边界上的最值往往比较复杂. 除此而外，实际问题中经常涉及到多元函数的定义域不是有界闭域的情形，此时不能预先断言函数一定存在最小值或最大值. 针对这些情形，绝大部分教材是这样处理的：如果根据实际问题的性质，知道函数的最小值(或最大值)一定在区域内部取到，而函数在区域内部仅有一个驻点，则断言函数在该点取到最小值(或最大值). 显然，凭直观判断实际问题的最小值(或最大值)一定在区域内部取到，不仅难以令学生信服，而且容易给学生造成困惑.

2　问题分析与思考

关于一元函数的最值，我们有如下结论：如果函数 f 在区间 I 上可微，有唯一的驻点，并且 f 在该点取到极小值(或极大值)，那么 f 在该点取到最小值(或最大值). 很自然地，我们期望多元函数也有类似的结论.

---

①　收稿日期：2018-05-03
基金项目：国家自然科学基金项目(11701220).
作者简介：刘海东(1982-)，男，副教授，主要从事变分方法与临界点理论的研究.

在同济大学数学系编写的《高等数学》第 7 版教材中，下册第 114－115 页的例 5 和例 6 分别涉及到材料面积函数

$$f(x, y) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \qquad x > 0,\ y > 0 \tag{1}$$

以及断面面积函数

$$g(x, \alpha) = 24x \sin\alpha - 2x^2 \sin\alpha + x^2 \sin\alpha \cos\alpha \qquad 0 < x < 12,\ 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

教材没有预先证明函数 f 存在最小值以及函数 g 存在最大值，而是仅仅计算出函数的唯一驻点，进而断言函数在驻点处取到最小值或最大值. 在教学过程中，如果教师没有特别强调，许多学生很容易据此推测多元函数确实有类似的结论.

然而，由于自变量个数的增加，多元函数最值问题的研究远比一元函数复杂. 对多元函数而言，上述猜测其实是不成立的. 下面的反例源于文献[6].

例 1[6] 二元函数

$$h(x, y) = 64(\arctan x)^3 - 64(\arctan x)^2 + 8\arctan x \cdot \arctan y - (\arctan y)^2$$

在全平面上有唯一的驻点(0，0)，并且在(0，0)处取到极大值. 但是，由

$$h(\tan 1, \tan 1) = 7 > h(0, 0)$$

可知 $h(0, 0)$ 并不是函数 h 的最大值，则函数 h 在全平面上没有最大值.

因此，如何让学生理解和区别一元函数与多元函数最值问题的不同性质，取得较好的教学效果，是一个值得思考的方向[6-8].

3 教学探讨

多元函数最值的存在性是教学过程中容易被忽视的环节，然而它是计算多元函数最值的前提. 当多元函数的定义域不是有界闭域时，函数在区域边界附近(如果边界非空)以及无穷远处(如果区域无界)的渐近性质决定着函数的最值是否存在. 在这种情形下，如何证明多元函数存在最小值(或最大值)并非易事. 到目前为止，也没有统一的证明方法. 本节首先证明上述材料面积函数(1)和断面面积函数(2)确实存在最小值或最大值. 为此，我们需要如下定理：

定理 1[5] 有界闭域上的连续函数必有最小值和最大值.

例 2 二元函数 $f(x, y) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right)$ 在区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ 上有最小值.

证 记

$$D^* = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{10} \leqslant x \leqslant 100,\ \frac{1}{10} \leqslant y \leqslant 100\right\}$$

根据定理 1，二元函数 f 在有界闭域 D^* 上有最小值，记为 m. 显然 $m \leqslant f(2, 2) = 12$. 下证当 $(x, y) \in D \backslash D^*$ 时，$f(x, y) > 12$. 事实上，当 $(x, y) \in \left\{(x, y) \in D \,\middle|\, 0 < x < \frac{1}{10}\right\} \cup \left\{(x, y) \in D \,\middle|\, 0 < y < \frac{1}{10}\right\}$ 时，

$$f(x, y) > \frac{4}{x} + \frac{4}{y} > 40 > 12$$

当 $(x, y) \in \left\{(x, y) \in D \,\middle|\, x > 100,\ y \geqslant \frac{1}{10}\right\} \cup \left\{(x, y) \in D \,\middle|\, x \geqslant \frac{1}{10},\ y > 100\right\}$ 时，

$$f(x, y) > 2xy > 20 > 12$$

因此，二元函数 f 在区域 D 上的最小值为 m.

例 3 二元函数

$$g(x, \alpha) = 24x \sin\alpha - 2x^2 \sin\alpha + x^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

在区域 $D = \left\{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 12,\ 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ 上有最大值.

证 根据一元函数的连续性，可取 $\alpha_1 \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $48 \cos\alpha_1 < 1$，并取 $x_1 \in (10, 12)$ 满足 $24x_1 -$

$2x_1^2<3$. 记

$$D^*=\left\{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\left|1\leqslant x\leqslant x_1,\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1\right.\right\}$$

根据定理 1，二元函数 g 在有界闭域 D^* 上有最大值，记为 M. 显然 $M\geqslant g\left(6,\frac{\pi}{3}\right)=45\sqrt{3}>75$. 下证当 $(x,\alpha)\in D\backslash D^*$ 时，$g(x,\alpha)<75$. 事实上，当 $(x,\alpha)\in\{(x,\alpha)\in D\mid 0<x<1\}$ 时，

$$g(x,\alpha)\leqslant 24x-2x^2+x^2=24x-x^2<24-1=23<75$$

当 $(x,\alpha)\in\{(x,\alpha)\in D\mid x_1<x<12\}$ 时，

$$g(x,\alpha)\leqslant 24x-2x^2+\frac{1}{2}x^2<24x_1-2x_1^2+72<75$$

当 $(x,\alpha)\in\left\{(x,\alpha)\in D\left|0<\alpha<\frac{\pi}{6}\right.\right\}$ 时，

$$g(x,\alpha)\leqslant(24x-2x^2+x^2)\sin\alpha=(24x-x^2)\sin\alpha<144\times\frac{1}{2}=72<75$$

当 $(x,\alpha)\in\left\{(x,\alpha)\in D\left|\alpha_1<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right.\right\}$ 时，

$$g(x,\alpha)\leqslant(24x-2x^2)+x^2\cos\alpha_1\leqslant 72+12^2\cos\alpha_1<75$$

因此，二元函数 g 在区域 D 上的最大值为 M.

注 1　例 2 和例 3 的证明思路是：分析多元函数在区域边界附近（如果边界非空）以及无穷远处（如果区域无界）的渐近性质，寻找适当的有界闭域 $D^*\subset D$. 根据定理 1，多元连续函数在有界闭域 D^* 上必有最小值 m 和最大值 M. 如果能证明函数在 $D\backslash D^*$ 上的值恒大于 m（或小于 M），则函数在区域 D 上有最小值 m（或最大值 M）.

上述证明思路具有一定的普适性，可以应用于其它多元函数最值存在性的证明. 众所周知，最小二乘法在实际生活中有着非常广泛的应用，它的基本原理如下[9]：假设 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$ 是一组测量数据，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等，确定一条直线 $y=ax+b$，使得它与这些测量点的偏差平方和

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^n(ax_i+b-y_i)^2$$

最小. 几乎所有的高等数学和数学分析教材都没有证明上述函数在全平面上有最小值，而仅仅关注如何确定直线 $y=ax+b$. 接下来，我们给出严格的数学证明.

例 4　假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等，则二元函数 $f(a,b)=\sum\limits_{i=1}^n(ax_i+b-y_i)^2$ 在全平面上有最小值.

证　当 $n=1$ 时，结论显然成立. 下面考虑 $n\geqslant 2$ 的情形. 不妨设 $x_1\neq x_2$. 定义二元连续函数

$$g(a,b)=\sum_{i=1}^n(ax_i+b)^2$$

根据定理 1，函数 g 在有界闭域 $S_1=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid a^2+b^2=1\}$ 上有最小值，记为 m_0. 首先断言 $m_0>0$. 若不然，则存在 $(a_0,b_0)\in S_1$，满足

$$g(a_0,b_0)=\sum_{i=1}^n(a_0x_i+b_0)^2=0$$

因此，$a_0x_1+b_0=0$ 且 $a_0x_2+b_0=0$. 由 $x_1\neq x_2$，可知 $a_0=b_0=0$. 这与 $(a_0,b_0)\in S_1$ 矛盾.

由二元函数 g 的齐次性，有

$$g(a,b)=\sum_{i=1}^n(ax_i+b)^2\geqslant m_0(a^2+b^2)\qquad\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$$

因此

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^n(ax_i+b-y_i)^2=g(a,b)-2a\sum_{i=1}^n x_iy_i-2b\sum_{i=1}^n y_i+\sum_{i=1}^n y_i^2\geqslant$$

$$m_0(a^2+b^2)-\left[\frac{m_0}{2}a^2+\frac{2}{m_0}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\right]-\left[\frac{m_0}{2}b^2+\frac{2}{m_0}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2\right]+\sum_{i=1}^n y_i^2=$$

$$\frac{m_0}{2}(a^2+b^2)-\frac{2}{m_0}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2-\frac{2}{m_0}\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big)^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \qquad \forall (a, b)\in\mathbb{R}^2$$

则当 $a^2+b^2\to+\infty$ 时，$f(a, b)\to+\infty$.

固定 $L>\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2=f(0, 0)$，则存在 $r>0$，使得当 $a^2+b^2>r^2$ 时，$f(a, b)>L$. 而二元函数 f 在有界闭域 $D_r=\{(a, b)\in\mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2\leqslant r^2\}$ 上有最小值，记为 m. 显然，$m\leqslant f(0, 0)<L$. 因此，二元函数 f 在全平面上的最小值为 m.

综上所述，在讲授多元函数的最值时，教师应从经典的例题入手，引导学生首先利用注 1 中的思路证明函数存在最小值(或最大值)，然后选择恰当的方法计算函数的最小值(或最大值). 这不仅有利于培养学生严密的逻辑思维能力，也能取得事半功倍的教学效果.

参考文献:

[1] 潘鼎坤. 高等数学教材中的常见瑕疵 [M]. 西安：西安交通大学出版社，2006.

[2] 喻丽菊，马柏林. 浅谈数列极限概念的教学 [J]. 高等数学研究，2017，20(5)：1-4.

[3] 张双虎，欧增奇. 高等数学中牛顿-莱布尼茨公式的教学探讨 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(12)：190-195.

[4] 江　蓉，王守中. 关于曲线积分与曲面积分教学的探讨 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(2)：142-146.

[5] 同济大学数学系. 高等数学 [M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

[6] 梁宗巨. 多元函数的最大值与最小值 [J]. 数学通报，1965(10)：41-45.

[7] 柴　俊. 关于二元函数最值的一个注记 [J]. 高等数学研究，2003，6(1)：26,29.

[8] 杨胜利. 多元函数的最值定理及其应用 [J]. 高等数学研究，2011，14(2)：8-10.

[9] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册) [M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2010.

Discussion in Teaching on Minimum and Maximum Values of Functions of Several Variables

LIU Hai-dong，　MIN　Xiao

College of Mathematics，Physics and Information Engineering，Jiaxing University，Jiaxing Zhejiang 314001，China

Abstract：The minimum and maximum value of functions of several variables is one of difficulties in teaching advanced mathematics. In many math books，attentions are only paid to the calculation of minimum and maximum values of functions，while the premise been ignored，that is，existence of minimum and maximum values. In this paper some examples in classic books have been analyzed and it proves that these problems indeed have a minimum (or maximum) value. Then students′ doubts about this part dissipate and they can understand the existence of minimum and maximum values deeply.

Key words：functions of several variables；minimum and maximum values；existence

责任编辑　廖　坤