第 44 卷 第 5 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 5 月
Vol. 44 No. 5 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) May. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.05.001

基于复值神经网络的分式规划问题①

张 雷[1,2], 王利敏[1], 李小兵[2]

1. 重庆交通大学 经济与管理学院,重庆 400074;2. 重庆交通大学 数学与统计学院,重庆 400074

摘要: 研究了利用复数神经网络解决带有区间约束条件的复变量非线性分式规划问题,提出的神经网络模型关于问题的可行解具有全局稳定性. 对模型平衡点的存在性和稳定性给出了详细推导和证明. 最后通过数值例子证实了该模型的可靠性和有效性.

关 键 词: 复值神经网络;非线性分式规划;平衡点;全局稳定性

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)05-0001-06

文献[1]将神经网络应用于求解线性规划问题和旅行商问题;文献[2]引入了非线性规划电路,并利用有限的阀参数来解决非线性规划问题;随后文献[3]提出了基于拉格朗日方法的拉格朗日网络用于求解二次规划问题. 但上述模型都是实空间上的,在实际问题中很多问题都涉及到复数信号[4-7]. 近年来,复空间上的分式规划问题得到了广泛研究[8-9]. 复数神经网络可以直接处理复数信号,目前神经动态优化算法主要是利用实数神经网络模型对实空间上的优化问题进行求解,很少有人利用复数神经网络模型研究复空间上的优化问题[10-11].

本文中复数神经网络神经元的状态、输出以及网络的权值都是复数,它能直接处理复数数据. 复数域不仅提供了一种简明的表示方法,而且能够保持原始问题的物理特征. 同时,将带有区间约束的约束条件通过变量替换和坐标平移转化为复平面上以原点为中心的圆环区域或矩形环区域,从而简化了约束条件,方便了之后的讨论. 因此,直接利用复数解决问题的方法更优.

1 模型的建立

本文构造一个复数域上的RNN(recurrent neural network)模型,此模型同时适用于线性分式规划和非线性分式规划. 现在讨论一般的复数非线性分式规划问题:

$$\min\left\{F(\boldsymbol{z})=\frac{g(\boldsymbol{z})}{h(\boldsymbol{z})}:\ \boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{d}\right\} \tag{1}$$

其中:$g(\boldsymbol{z}), h(\boldsymbol{z})$ 是定义在一个开凸集 $O\subseteq\mathbb{C}^n$ 上的连续可微函数;$\boldsymbol{x}=\mathrm{Re}(\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^n$;$\boldsymbol{y}=\mathrm{Im}(\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^n$;$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n$ 是常向量;可行解约束在 $W=\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{d}\}$ 中;$\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$ 是决策向量即自变量. 约定目标函数中的 $g(\boldsymbol{z})>0$. 实际生活中出现的分式规划问题大都具有广义凸性,目标函数 $F(\boldsymbol{z})$ 在 O 处是伪凸的.

考虑如下的一元递归神经网络,其状态变量 $\boldsymbol{z}$ 用以下微分方程表示[12]:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{z}+f_W(\boldsymbol{z}-\nabla F(\boldsymbol{z})) \tag{2}$$

其中:∇是梯度算子,投影算子 $f_W:\mathbb{C}^n\longmapsto W$ 定义为 $f_W=\arg\min\limits_{\omega\in W}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\omega}\|^2$. 令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

① 收稿日期:2017-02-16
基金项目:国家自然科学基金项目(11501065,11401061);重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2015jcyjBX0131,cstc2015jcyjA00033);重庆市教委项目(KJ1600504,KJ1600512);重庆交通大学自然科学基金校内培育项目(2018PY22).
作者简介:张 雷(1980-),男,副教授,主要从事优化算法、控制理论研究.

代表虚数单位，$F(\boldsymbol{z})$ 可以看作是由其实部和虚部组成的二变量实函数. 由此，定义以下辅助函数，$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longmapsto\mathbb{R}^n$，其中：$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=F(\boldsymbol{z})$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}$.

对于给定的 $\boldsymbol{w}=(\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}),\mathrm{Im}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}}$，定义映射 $\varphi(\boldsymbol{z})$，且 φ 是可逆的，将 $\boldsymbol{z}=\varphi^{-1}(w)$ 代入 $g(\boldsymbol{z})$，得到 $f(\boldsymbol{w})=F(\varphi^{-1}(\boldsymbol{w})):\mathbb{R}^{2n}\longmapsto\mathbb{R}^n$.

由 $\boldsymbol{x}=\dfrac{(\boldsymbol{z}+\bar{\boldsymbol{z}})}{2}$，$y=-\mathrm{i}\dfrac{(\boldsymbol{z}-\bar{\boldsymbol{z}})}{2}$，可以得到 $F(\boldsymbol{z})=F(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}}):\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\longmapsto\mathbb{R}^n$，其中 $\bar{\boldsymbol{z}}$ 是 $\boldsymbol{z}$ 的复共轭. 假设 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}$ 存在，则对复变量 $\boldsymbol{z}$ 和 $\bar{\boldsymbol{z}}$ 的偏导数定义为如下形式：

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{\boldsymbol{z}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}\right)\qquad\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}\right)\tag{3}$$

假设 $F(\boldsymbol{z})$ 关于 $\boldsymbol{z}$ 和 $\bar{\boldsymbol{z}}$ 是可微的，$F(\boldsymbol{z})$ 的复梯度定义为如下形式[13]：

$$\nabla F=2\frac{\partial F}{\partial\bar{\boldsymbol{z}}}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}\tag{4}$$

由可行解集 W 的区间约束，算子 f_{W} 可明确地表达为如下的形式：$f_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{z})=(f_{\mathrm{W}_1}(\boldsymbol{z}),\cdots,f_{\mathrm{W}_n}(\boldsymbol{z}))$，其中第 i 个分量是 $f_{\mathrm{W}_i}(z_i)=f_{\mathrm{RW}_i}(x_i)+if_{\mathrm{IW}_i}(y_i)$.

又由 $\boldsymbol{z}-\nabla F(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}-\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}-\mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}=\left(x-\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}\right)+\mathrm{i}\left(\boldsymbol{y}-\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}\right)$，从而模型转化成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{x}+f_{\mathrm{RW}}\left(\boldsymbol{x}-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}\right)+\mathrm{i}\left(-\boldsymbol{y}+f_{\mathrm{IW}}\left(\boldsymbol{y}-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}\right)\right)\tag{5}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{x}+f_{\mathrm{RW}}\left(\boldsymbol{x}-\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{y}+f_{\mathrm{IW}}\left(\boldsymbol{y}-\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}\right)\end{cases}\tag{6}$$

记 $\boldsymbol{u}=(\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}),\mathrm{Im}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2n}$，$\nabla F(\boldsymbol{u})=\left(\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}},\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{y}}\right)$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{u}+f_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{u}-\nabla F(\boldsymbol{u}))\tag{7}$$

模型(2)以 n 维复向量作为自变量，将复向量转化成 $2n$ 维的实向量，从而实现了从复数神经网络模型向实数神经网络模型的转化. 区间约束条件由原来的 $W=\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{d}\}$ 转化为 $W'=\{\boldsymbol{u}\mid a_i\leqslant u_i\leqslant b_i,\ c_j\leqslant u_j\leqslant d_j,\ i=1,2,\cdots,n,\ j=n+1,n+2,\cdots,2n\}$.

将 RNN 模型(7)应用于解决优化问题(1)时，要求初始状态应该能够被映射到 W 上，即对任意的 $\boldsymbol{u}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_n^0)\in\mathbb{R}^{2n}$，相应的神经网络轨迹初始点应为 $\boldsymbol{u}(0)=f_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{u}^0)$. RNN 模型(7)的平衡状态解集 Ω^e 定义如下：

$$\Omega^E=\{\boldsymbol{u}^E\in\mathbb{R}^{2n}\mid\boldsymbol{u}^E=f_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{u}^E-\nabla F(\boldsymbol{u}^E))\}\subseteq W'\tag{8}$$

在这里，通过 $\boldsymbol{w}=(\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}),\mathrm{Im}(\boldsymbol{z}))$ 和 $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}})\overset{\Delta}{=}\varphi(\boldsymbol{z})\in\mathbb{C}^{2n}$ 建立了复数与实数之间的转换.

2 模型的稳定性

定义 1 设 $\boldsymbol{u}(t)$ 是系统 $\dot{\boldsymbol{u}}=F(\boldsymbol{u})$ 的一个解，如果当 $t\to\infty$每一个开始于 W' 上的解 $\boldsymbol{u}(t)$ 满足

$$\rho(\boldsymbol{u}(t),U)\to 0\tag{9}$$

则系统关于 W' 在 U 上是一致收敛的. 其中 $\rho(\boldsymbol{u}(t),U)=\inf\limits_{a\in U}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}\|$，$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0\in W'$.

定义 2 如果神经网络模型(7)相应的动力学系统是一致收敛的，则神经网络模型关于 W' 在 U 上是一致收敛的.

引理 1[14] 对任意给定的初始点 $\boldsymbol{u}(0;\boldsymbol{u}^0)=\boldsymbol{u}^0\in W'$，模型(7)的解 $\boldsymbol{u}(t;\boldsymbol{u}^0)$ 是有界的，且这个解可以延伸到 ∞ 时间.

引理 2[14]　对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{2n}$，$\boldsymbol{u} \in W'$，有 $(\boldsymbol{v} - f_W(\boldsymbol{v}))^{\mathrm{T}}(f_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}) \geqslant 0$.

美国数学家 LaSalle 发现 Lyapunov 函数与 Birkoff 极限集之间的内在联系而提出了著名的不变原理. 考虑自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = f(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

其中函数 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$，$f(0) = 0$.

引理 3(LaSalle 不变原理)[15]　设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个紧集，从 D 内出发的解 $x = \varphi(t; 0, x_0)$ 恒在 D 中，若存在 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \in C(D, \mathbb{R})$，使得 $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)} \leqslant 0$，又设 $E = \left\{\boldsymbol{x} \left| \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)} = 0, x \in D\right.\right\}$，$M \subseteq E$ 是最大不变集，则当 $t \to \infty$ 时，有 $\varphi(t; 0, x_0) \to M$.

定理 1　对于神经网络系统(7)，有以下两个性质成立：

(a) 集合 W' 是正不变的；

(b) 若 $\boldsymbol{u}_0 \notin W'$，则 $u(t)$ 在有限时间内会进入集合 W'，并从此保持在集合 W' 内，或当 $t \to \infty$ 时，$\rho(t) = dist(\boldsymbol{u}(t), W') \to 0$ 成立，其中 $dist(\boldsymbol{u}(t), W') = \inf\limits_{a \in W'} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{a} \|$.

证　为了方便证明，以下自变量和函数值均表示成向量的分量形式.

记

$$\begin{gathered} W' = \{\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{a}_i \leqslant \boldsymbol{u}_i \leqslant \boldsymbol{b}_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\} \\ W^i = \{\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{c}_i \leqslant \boldsymbol{u}_i \leqslant \boldsymbol{d}_i,\ i = n+1, n+2, \cdots, 2n) \end{gathered} \tag{11}$$

首先证明对任意 $\boldsymbol{u}_i^0 = \boldsymbol{u}_i(0; \boldsymbol{u}^0) \in W^i$，它在以后的任意时间内对每一个分量都有 $\boldsymbol{u}_i(t) = \boldsymbol{u}_i(t; \boldsymbol{u}^0) \in W^i$ 成立. 即对所有的 $t \geqslant 0$，$\boldsymbol{u}_i(t) \in W^i$.

记

$$t^* = \sup\{\tilde{t} \mid \boldsymbol{u}_i(t) \in W^i,\ \forall t \in [0, \tilde{t}]\} \geqslant 0 \tag{12}$$

即 t^* 表示 $\boldsymbol{u}_i(t) \in W^i$ 的最晚时间，在 t^* 之后至少存在一个 t' 使 $\boldsymbol{u}'_i(t') \notin W^i$. 所以要证明以上结论，只需证明 $\tilde{t} = +\infty$，这就意味着 $\boldsymbol{u}_i(t) \in W^i$ 永远成立.

接下来使用反证法证明 $\tilde{t} = +\infty$. 假设 $\tilde{t} < \infty$，则当 $t \in [0, t^*]$ 时 $\boldsymbol{u}_i(t) \in W^i$，当 $t \in (t^*, t^* + \delta)$ 时 $\boldsymbol{u}_i(t') \notin W^i$，其中 $\delta > 0$. 不失一般性，不妨假设

$$\boldsymbol{u}_i(t) < \boldsymbol{a}_i,\ \forall t \in (t^*, t^* + \delta) \tag{13}$$

由 f_{W_i} 的定义及模型(7) 和(13) 式，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}_i(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant -\boldsymbol{u}_i(t) + \boldsymbol{a}_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ \forall t \in (t^*, t^* + \delta) \tag{14}$$

所以，$\boldsymbol{u}_i(t)$ 在 $t \in (t^*, t^* + \delta)$ 上都是严格单调递增的，因此

$$\boldsymbol{u}_i(t) > \boldsymbol{u}_i(t^*),\ \forall t \in (t^*, t^* + \delta) \tag{15}$$

记当 $t \in [0, t^*]$ 时有 $\boldsymbol{u}_i(t) \in W'$，又由(13) 式知 $\boldsymbol{u}_i(t_i^*) = \boldsymbol{a}_i$，所以由(15) 式可以得到

$$\boldsymbol{u}_i(t) > \boldsymbol{a}_i,\ \forall t \in (t^*, t^* + \delta) \tag{16}$$

由此得到矛盾. 所以 $t_i^* = +\infty$，即对所有的 $t \geqslant 0$，$\boldsymbol{u}_i(t) \in W^i$. 这说明集合 W' 是正不变的，(a) 得到保证. 至于对 $\boldsymbol{u}_i(t) < \boldsymbol{c}_i$，$\boldsymbol{u}_i(t) > \boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{u}_i(t) > \boldsymbol{d}_i$ 情况的证明类似于 $\boldsymbol{u}_i(t) < \boldsymbol{a}_i$. 在此不再赘述.

接下来证明若 $\boldsymbol{u}_i^0 = \boldsymbol{u}_i(0; \boldsymbol{u}^0) \notin W^i$，$\boldsymbol{u}_i(t)$ 最终也会收敛到 W' 中.

对于 i，假设 $\boldsymbol{u}_i^0 = \boldsymbol{u}_i(0; \boldsymbol{u}^0) \notin W^i$，如果存在一个 $t_i^* > 0$ 使得 $\boldsymbol{u}(t_i^*) \in W^i$，则根据(a)，当 $t \geqslant t_i^*$ 时总有 $\boldsymbol{u}(t_i^*) \in W^i$ 成立. 现用反证法证明.

假设对所有的 $t \geqslant 0$，$\boldsymbol{u}_i(t) \notin W^i$. 不失一般性，假设 $\boldsymbol{u}_i(t) < \boldsymbol{a}_i$，则 $\sup\{\boldsymbol{u}_i(t) \mid t \geqslant 0\} = \boldsymbol{a}_i$. 若不然，假设 $\sup\{\boldsymbol{u}_i(t) \mid t \geqslant 0\} = m < \boldsymbol{a}_i$，由模型(7) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}_i(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant -m + \boldsymbol{a}_i = \delta > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{17}$$

从而

$$\boldsymbol{u}_i(t) \geq \delta \cdot t + \boldsymbol{u}_i^0,\ t > 0$$

这与$\boldsymbol{u}_i(t) < \boldsymbol{a}_i$ 矛盾. 因此 $\sup\{\boldsymbol{u}_i(t) \mid t \geqslant 0\} = \boldsymbol{a}_i$.

以上证明说明:若$\boldsymbol{u}_0 \notin W'$,则$\boldsymbol{z}(t)$在有限时间内会进入集合$W'$,并从此保持在$W'$内,或当$t \to \infty$时,$\rho(t) = dist(\boldsymbol{u}(t), W') \to 0$ 成立,其中 $dist(\boldsymbol{u}(t), W') = \inf\limits_{a \in W'} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{a}\|$.

定理 2 神经网络模型(7) 的解集 Ω^* 关于 W' 是一致收敛的.

证 由引理 2,可得

$$(\boldsymbol{v} - f_W(\boldsymbol{v}))^{\mathrm{T}}(f_W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}) \geqslant 0 \tag{18}$$

令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})$,$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$,则

$$(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u}) - f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})))^{\mathrm{T}}(f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u}) \geqslant 0 \tag{19}$$

$$-(f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u} + \nabla F(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u}) \geqslant 0$$

$$-(f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u}) - (\nabla F(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u}) \geqslant 0$$

$$(\nabla F(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\{(f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u})\} \leqslant -\|f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u}\|^2 \tag{20}$$

定义能量函数 $F(\boldsymbol{u})$,关于(7) 式提出的 $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{y}(t)$ 中的 $\boldsymbol{x}(t)$ 对函数进行微分计算,得到

$$\frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{u}(t))}{\mathrm{d}t} = (\nabla F(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = (\nabla F(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\{f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u}\} \tag{21}$$

根据(19) 式进而得到

$$\frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{u}(t))}{\mathrm{d}t} \leqslant -\|f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u}\|^2 \leqslant 0 \tag{22}$$

表明 $F(\boldsymbol{u})$ 沿着系统(7) 的轨线是单调递减的,$\boldsymbol{u}(t)$ 是有界的,所以 $F(\boldsymbol{u})$ 是系统(7) 的 Liapunov 函数.

因此,由 LaSalle 正不变规则,所有开始于W'的系统(7) 的轨线都将收敛到E的最大正不变子集Σ中,其中

$$E = \left\{\boldsymbol{u} \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = 0\right\} \tag{23}$$

由(22) 式可知$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0$ 当且仅当 $f_W(\boldsymbol{u} - \nabla F(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{u} = 0$,这说明 $\boldsymbol{u}(t)$ 是模型(7) 的平衡点或者说 $\boldsymbol{u}(t) \in \Omega$,这里 $\Omega = \Omega^*$ 是神经网络模型(7) 开始于 W' 的所有轨线的收敛集,从而定理 2 得证.

3 数值仿真例子

例 考虑如下的分式规划问题

$$\min F(\boldsymbol{z}) = \frac{|z_1| \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{z})}}{5 - z_2\bar{z}_2}$$

$F(\boldsymbol{z})$ 的梯度为

$$\nabla F(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y_1} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{z})}\left(\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + 2|z_1|\right)}{5 - z_2\bar{z}_2} \\[3ex] \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{z})}\left(\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + 3|z_1|\right)}{5 - z_2\bar{z}_2} \\[3ex] \dfrac{3(5 - z_2\bar{z}_2)\cdot|z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{z})} + 2x_2|z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{z})}}{(5 - z_2\bar{z}_2)^2} \\[3ex] \dfrac{-2(5 - z_2\bar{z}_2)\cdot|z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{z})} + 2y_2|z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{z})}}{(5 - z_2\bar{z}_2)^2} \end{pmatrix}$$

其中:$0 \leqslant x_1 \leqslant 2$,$1 \leqslant y_1 \leqslant 3$,$0 \leqslant x_2 \leqslant 2$,$1 \leqslant y_2 \leqslant 3$,$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 3 - 2\mathrm{i} \\ 2 + 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

设 $v_i = x_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}$,$w_i = y_i - \frac{\partial f}{\partial y_i}$,$i = 1,2$,则

$$v_1 = \frac{x_1(5-x_2^2-y_2^2)\sqrt{x_1^2+y_1^2}-(x_1+2x_1^2+2y_1^2)\mathrm{e}^{2x_1+3x_2+3y_1-2y_2}}{(5-x_2^2-y_2^2)\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$v_2 = \frac{x_2(5-x_2^2-y_2^2)\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\mathrm{e}^{2x_1+3x_2+3y_1-2y_2}(2x_2-3x_2^2-3y_2^2+15)}{(5-x_2^2-y_2^2)^2}$$

$$w_1 = \frac{y_1(5-x_2^2-y_2^2)\sqrt{x_1^2+y_1^2}-(y_1+3x_1^2+3y_1^2)^2\mathrm{e}^{2x_1+3x_2+3y_1-2y_2}}{(5-x_2^2-y_2^2)\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$w_2 = \frac{y_2(5-x_2^2-y_2^2)^2-2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\mathrm{e}^{2x_1+3x_2+3y_1-2y_2}(y_2+x_2^2+y_2^2-5)}{(5-x_2^2-y_2^2)^2}$$

由此得到动力系统方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}-x_1 & v_1<0\\ -x_1+v_1 & 0\leqslant v_1\leqslant 2\\ -x_1+2 & v_1>2\end{cases}\qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}-x_2 & v_2<0\\ -x_2+v_2 & 0\leqslant v_2\leqslant 2\\ -x_2+2 & v_2>2\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}-y_1+1 & w_1<1\\ -y_1+w_1 & 1\leqslant w_1\leqslant 3\\ -y_1+3 & w_1>3\end{cases}\qquad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}-y_2+1 & w_2<1\\ -y_2+w_2 & 1\leqslant w_2\leqslant 3\\ -y_2+3 & w_2>3\end{cases}\tag{24}$$

设系统方程的初始点为$(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，对应初始点的解为$F^*(\boldsymbol{z})=\frac{\mathrm{e}}{4}$，通过 matlab 程序计算，可以得到方程(24) 的解为$(x_1,x_2,y_1,y_2)^{\mathrm{T}}=(0.000\,0, 0.000\,0, 1.000\,0, 1.791\,3)^{\mathrm{T}}$.

经过上述两种模型仿真实例可知，本文提出的神经网络模型在计算时，运行状态较好，对于任意初始点，模型的轨迹都会很快收敛于最优解(图 1).

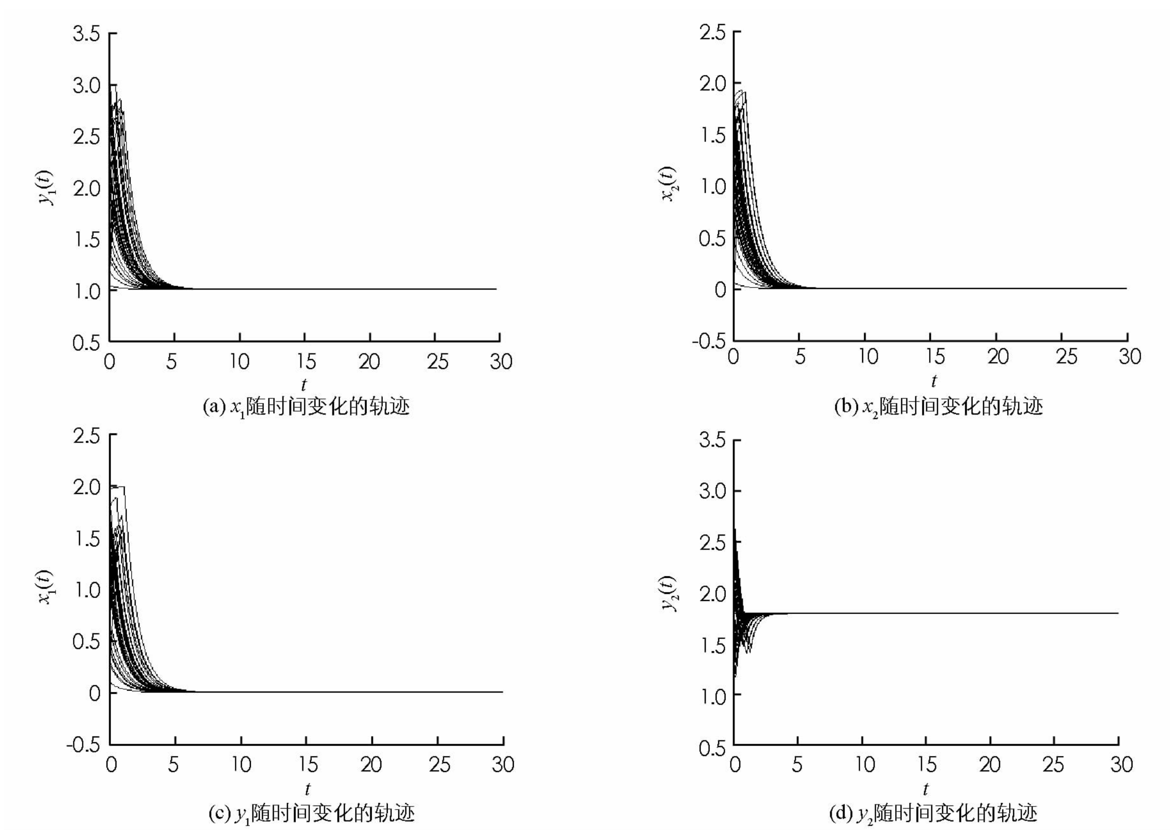

图 1　模型轨迹图

4　结　　论

本文针对带有区间约束的复变量非线性分式规划问题，提出了一个复数神经网络模型，通过证明可行

解的收敛性证明了神经网络模型的稳定性. 现有的基于罚函数的神经网络模型在解决非线性分式规划问题时可能会出现找不到精确解的情况，而本文提出的模型克服了这一缺陷.

参考文献：

[1] HOPFIELD J，TANK D. Computing with Neural Circuits：a Model [J]. Science，1986，233(4764)：625-633.
[2] KENNEDY M P，CHUA L O. Neural Networks for Nonlinear Programming [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems，1988，35(5)：554-562.
[3] ZHANG S. Lagrange Programming Neural Networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and System II，Analog Digital Signal Process，1992，39(7)：441-452.
[4] LEVINSON N. Linear Programming in Complex Space [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1966，14(1)：44-62.
[5] SWARUP K，SHARMA I C. Programming with Linear Fractional Functionals in Complex Space [J]. Cahiers du Centre d-Etudes Recherche Opér，1970，12：103-109.
[6] FERRERO O. On Nonlinear Programming in Complex Space [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1992，164：399-416.
[7] BRANDWOOD D H. A Complex Gradient Operator and Its Application in Adaptive Array Theory [J]. IEEE Proceedings on Communications，Radar and Signal Processing，2008，130(1)：11-16.
[8] LAI H C，HUANG T Y. Optimality Conditions for a Nondifferentiable Minimax Programming in Complex Spaces [J]. Nonlinear Analysis，2009，71(3-4)：1205-1212.
[9] 焦合华. 一类极大极小分式规划的最优性和对偶 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(9)：75-80.
[10] 汤干文. 具有脉冲和变时滞的离散 Cohen-Grossberg 神经网络的全局指数同步 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(12)：43-49.
[11] ZHANG L，SONG Q K，ZHAO Z J. Stability Analysis of Fractional-Order Complex-Valued Neural Networks with Both Leakage and Discrete Delays [J]. Applied Mathematics and Computation，2017，298：296-309.
[12] ZHANG Q J，LU X Q. A Recurrent Neural Network for Nonlinear Fractional Programming [J]. Mathematical Problems in Engineering，2012，2012：589-597.
[13] ZHANG S，XIA Y，WANG J. Analysis of a Complex-Valued Projection Neural Network for Constrained Optimization of Real Functions in Complex Variables [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems，2015，26(12)：3227-3238.
[14] KINDERLEHRER D，STAMPACCHIA G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications [M]. New York ：Academic Press，1980.
[15] 刘碧森，王晓梅，范小明，等. 神经网络定性理论 [M]. 北京：科学出版社，2008.

Complex Variable Nonlinear Fractional Programming Problems Based on Complex-Valued Neural Network

ZHANG Lei[1,2]， WANG Li-min[1]， LI Xiao-bing[2]

1. College of Mathematics and Statistics，Chongqing Jiaotong University，Chongqing 400074，China；
2. College of Economics and management，Chongqing Jiaotong University，Chongqing 400074，China

Abstract：The solution of complex nonlinear fractional programming problem with interval constraints has been studied in this paper by means of the complex neural network，feasible solutions about the problem of global stability of the equilibrium have been proposed with the neural network model，and points for the existence and stability have been deduced and proved. Finally，a numerical example is given to demonstrate the reliability and effectiveness of the proposed model.

Key words：complex-valued neural networks；nonlinear fractional optimization；equilibrium；global convergence

责任编辑 张 枸