

具有合作行为且捕食者患病的生态流行病模型分析^①

张攀, 王稳地, 向茜

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 研究了一类捕食者患病的捕食-食饵模型, 且考虑捕食者种群存在合作捕食行为. 首先讨论了无病子模型的动力学性质, 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 证明了边界平衡点的全局稳定性, 利用 Dulac 函数讨论了仅一个正平衡点时的全局稳定性以及 Hopf 分支产生的情况. 其次讨论了有病系统中三者共存的平衡点的情况, 利用 Hurwitz 判据得到共存平衡点的稳定条件.

关键词: Lyapunov 函数; Dulac 函数; 全局稳定性; Hopf 分支

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2019)05-0007-06

种群动力学揭示了种群之间的关系及发展规律, 传染病动力学研究的是一个种群发生传染病时疾病的发展规律以及可能的预防控制. 它们是生物数学研究的两个重要方面, 因此将两者结合起来的生态流行病系统是一个重要的研究方向^[1-3]. 文献[4]在关于捕食者种群考虑合作捕猎和疾病传播的模型中, 分析了捕食者种群持续以及疾病持续的条件, 且合作捕猎诱导 Allee 效应的产生. 文章中考虑了线性的攻击率函数. 本文在此基础上考虑更符合实际情况的饱和的攻击率函数, 且对于疾病考虑线性发生率. 本文还假设疾病会影响捕食者的捕食行为. 为了简化讨论, 进一步假设染病的捕食者失去捕食能力, 因而不考虑垂直传染. 本文考虑捕食者种群患传染病, 仅将捕食者种群分为易感的捕食者(S)和染病的捕食者(I)两部分, 不考虑疾病的恢复. 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \Lambda - a(S)NS - bN \\ \frac{dS}{dt} = \epsilon a(S)NS - \beta IS - mS \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - mI - \mu I \end{cases} \quad (1)$$

其中: Λ 为食饵的补充, b 表示食饵的死亡率, β 为疾病感染率, m 为捕食者的自然死亡率, ϵ 表示捕食者捕食食饵转化为自身生长的转化率且 $0 < \epsilon < 1$, μ 为染病捕食者的因病死亡率. 文献[4]为了考虑合作捕食行为, 假设了一个跟捕食者密度相关的攻击率函数, 表达式如下:

$$a(P) = a_0 + \alpha P$$

其中: P 表示捕食者种群数, a_0 为捕食者无合作的情况下对食饵的攻击率, α 为捕食者合作使得攻击率增强的反映参数. 本文考虑一个具有饱和性质的攻击率函数, 表达式如下:

① 收稿日期: 2018-07-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(11571284).

作者简介: 张攀(1993-), 女, 硕士研究生, 主要从事生物数学研究.

通信作者: 王稳地, 教授, 博士研究生导师.

$$a(P) = a_0 + \frac{\alpha P}{1 + a_1 P}$$

基于生物意义, 假设以上所有的参数都为非负数, 模型(1)的初值条件为 $N(0) > 0$, $S(0) > 0$, $I(0) \geq 0$. 易证得系统(1)的解对于所有 $t > 0$ 是非负的, 且最终有界.

为了更直观地分析疾病传播和合作捕食对捕食者种群持续性和疾病的持续的影响, 将模型中变量 S 和 I 用 P 和 i 代替, 其中: P 表示总的捕食者种群数量, $P = S + I$; i 表示捕食者种群的患病率, $i = \frac{I}{P}$. 得到变换后的系统:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \Lambda - a(P, i)NP(1-i) - bN \\ \frac{dP}{dt} = [\epsilon a(P, i)N(1-i) - m - \mu i]P \\ \frac{di}{dt} = [\beta P - \mu - \epsilon a(P, i)N](1-i)i \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$a(P, i) = a_0 + \frac{\alpha P(1-i)}{1 + a_1 P(1-i)}$$

1 无病系统

为简化讨论, 考虑系统(2)无病情形下($i = 0$)的子系统

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \Lambda - a(P)NP - bN \\ \frac{dP}{dt} = \epsilon a(P)NP - mP \end{cases} \quad (3)$$

设任意正平衡点 $\bar{E} = (\bar{N}, \bar{P})$, $\bar{P}$ 为二次方程

$$m(\alpha + a_0 a_1)P^2 + [m(a_0 + ba_1) - \epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1)]P + mb - \epsilon \Lambda a_0 = 0$$

的根, 记 $\Delta = [m(a_0 + ba_1) - \epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1)]^2 - 4m(\alpha + a_0 a_1)[mb - \epsilon \Lambda a_0]$, 可得:

1) 当 $\Delta < 0$ 时, 系统(3)仅有 $\bar{E}_1 = \left(\frac{\Lambda}{b}, 0\right)$ 一个平衡点;

2) 当 $\Delta = 0$ 时, 若 $m(a_0 + ba_1) < \epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1)$, 则系统(3)有两个平衡点 $\bar{E}_1, \bar{E}_2$, 其中

$$\bar{E}_2(\bar{N}_2, \bar{P}_2) = \left(\frac{m}{\epsilon a(\bar{P}_2)}, \frac{\epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1) - m(a_0 + ba_1)}{2m(\alpha + a_0 a_1)}\right)$$

3) 当 $\Delta > 0$ 时, 若 $mb < \epsilon \Lambda a_0$, 则系统(3)也仅有两个平衡点 $\bar{E}_1, \bar{E}_3$, 其中

$$\bar{E}_3(\bar{N}_3, \bar{P}_3) = \left(\frac{m}{\epsilon a(\bar{P}_3)}, \frac{\epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1) - m(a_0 + ba_1) + \sqrt{\Delta}}{2m(\alpha + a_0 a_1)}\right)$$

4) 当 $\Delta > 0$ 时, 若 $mb > \epsilon \Lambda a_0$ 且 $m(a_0 + ba_1) < \epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1)$, 则系统(3)有 3 个平衡点 $\bar{E}_1, \bar{E}_4, \bar{E}_5$, 其中

$$\bar{E}_4(\bar{N}_4, \bar{P}_4) = \left(\frac{m}{\epsilon a(\bar{P}_4)}, \frac{\epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1) - m(a_0 + ba_1) - \sqrt{\Delta}}{2m(\alpha + a_0 a_1)}\right)$$

$$\bar{E}_5(\bar{N}_5, \bar{P}_5) = \left(\frac{m}{\epsilon a(\bar{P}_5)}, \frac{\epsilon \Lambda(\alpha + a_0 a_1) - m(a_0 + ba_1) + \sqrt{\Delta}}{2m(\alpha + a_0 a_1)}\right)$$

1.1 $\bar{E}_1$ 的稳定性

1) 当 $m < \frac{\epsilon \Lambda a_0}{b}$ 时, $\bar{E}_1$ 为鞍点, 不稳定;

2) 当 $m > \frac{\epsilon \Lambda a_0}{b}$ 时, $\bar{E}_1$ 为结点, 稳定.

定理 1 当 $\alpha < \frac{mba_1}{\epsilon\Lambda} - a_0a_1$ 时, 模型(3) 的无捕食者平衡点 $\bar{E}_1 = (\bar{N}_1, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证 模型(3) 可以写成如下等价系统

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -b(N - \bar{N}_1) - a(P)NP \\ \frac{dP}{dt} = \epsilon a(P)NP - mP \end{cases} \quad (4)$$

设 (N, P) 为系统(4) 的任意正解, 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \bar{N}_1 F\left(\frac{N}{\bar{N}_1}\right) + \frac{1}{\epsilon} P$$

其中函数 $F(\xi) = \xi - 1 - \ln\xi$, 且在 $(0, +\infty)$ 存在唯一最小值点 $\xi = 1$, 此时 $F(\xi) \geq F(1) = 0$. 正定函数 $V(t)$ 在边界平衡点 $\bar{E}_1$ 处取得最小值为零, 计算 $V(t)$ 沿着系统(4) 的轨线的全导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= F'\left(\frac{N}{\bar{N}_1}\right) \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\epsilon} \frac{dP}{dt} = \\ &= \frac{b}{N} (N - \bar{N}_1)^2 - \left[\frac{m}{\epsilon} - \bar{N}_1 a(P)\right] P \end{aligned}$$

因为 $a(P) = a_0 + \frac{aP}{1+a_1P} < a_0 + \frac{a}{a_1}$, 且 $\alpha < \frac{mba_1}{\epsilon\Lambda} - a_0a_1$, 则有 $\frac{m}{\epsilon} - \bar{N}_1 a(P) > \frac{m}{\epsilon} - \bar{N}_1 \left(a_0 + \frac{a}{a_1}\right) = \frac{m}{\epsilon} - \frac{\Lambda(a_0a_1 + \alpha)}{a_1b} > 0$. 因此 $V'(t) \leq 0$, 当且仅当 $(N, P) = (\bar{N}_1, 0)$ 时, 有 $V'(t) = 0$. 又因 $\frac{m}{\epsilon} - \frac{\Lambda a_0}{b} > \frac{m}{\epsilon} - \frac{\Lambda(a_0a_1 + \alpha)}{a_1b} > 0$ 即 $m > \frac{\epsilon\Lambda a_0}{b}$, 所以 $\bar{E}_1$ 是局部稳定的.

根据 LaSalle 不变集原理^[7] 可知, 模型(3) 的无捕食者平衡点 $\bar{E}_1 = (\bar{N}_1, 0)$ 是全局渐近稳定的.

1.2 $\bar{E}_2$ 的稳定性

易算得

$$\begin{aligned} \text{tr}\mathbf{J}(\bar{E}_j) &= \frac{m\bar{P}_j - (a_0 + (a_0a_1 + \alpha)\bar{P}_j)[(a_0 + (a_0a_1 + \alpha)\bar{P}_j)\bar{P}_j + b(1 + a_1\bar{P}_j)]}{(a_0 + (a_0a_1 + \alpha)\bar{P}_j)(1 + a_1\bar{P}_j)} \\ \det\mathbf{J}(\bar{E}_j) &= \frac{m\bar{P}_j[(a_0 + (a_0a_1 + \alpha)\bar{P}_j)^2 - b\alpha]}{(a_0 + (a_0a_1 + \alpha)\bar{P}_j)(1 + a_1\bar{P}_j)}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

则 $\det\mathbf{J}(\bar{E}_2) = 0$, 且 $\text{tr}\mathbf{J}(\bar{E}_2)$ 的符号由 Φ 确定,

$$\Phi = \epsilon\Lambda(\alpha + a_0a_1)(m - 2b) - (a_0 + ba_1)m^2$$

因此可得如下定理:

定理 2

1) 当 $\Phi < 0$ 时, $\bar{E}_2$ 为鞍结点, 它的邻域是由两个双曲扇形和一个抛物扇形组成的, 其中抛物扇形位于 P 轴和平衡点之间;

2) 当 $\Phi > 0$ 时, $\bar{E}_2$ 为鞍结点, 它的邻域是由两个双曲扇形和一个抛物扇形组成的, 其中双曲扇形位于 P 轴和平衡点之间;

3) 当 $\Phi = 0$ 时, $\bar{E}_2$ 为尖点, 它的邻域是由两个双曲扇形和两条分界轨线组成的, 其中一条分界轨线趋于正平衡点 $\bar{E}_2$, 其余所有轨线趋于 $\bar{E}_1$, 这从数学的角度解释了食饵足够多捕食者灭绝的情况.

证: 1), 2) 证明较简单, 仅对 3) 进行证明. 当 $\Delta = 0$ 且 $\Phi = 0$ 时, 系统仅有 $\bar{E}_2$ 这一个正平衡点, 下面对系统作变换, 使其为标准形式.

首先, 将平衡点 $\bar{E}_2$ 移到原点, 作变换 $x = N - \bar{N}_2$, $y = P - \bar{P}_2$, 再将系统的右侧部分关于原点进行 Taylor 展开得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}xy + A_{14}y^2 + F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = B_{11}x + B_{12}y + B_{13}xy + B_{14}y^2 + G_1(x, y) \end{cases}$$

其中 $F_1(x, y), G_1(x, y)$ 为 (x, y) 上的光滑函数且至少为三阶的.

再作变换 $X = x, Y = A_{11}x + A_{12}y$, 得

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y + \frac{A_{11}(A_{11}A_{14} - A_{12}A_{13})}{A_{12}^2}X^2 + \frac{A_{12}A_{13} - 2A_{11}A_{14}}{A_{12}^2}XY + \frac{A_{14}}{A_{12}^2}Y^2 + F_2(X, Y) \\ \frac{dY}{dt} = \frac{A_{11}(A_{11} - \epsilon A_{12})(A_{11}A_{14} - A_{12}A_{13})}{A_{12}^2}X^2 + \frac{(A_{11} - \epsilon A_{12})(A_{12}A_{13} - 2A_{11}A_{14})}{A_{12}^2}XY + \\ \frac{A_{14}(A_{11} - \epsilon A_{12})}{A_{12}^2}Y^2 + G_2(X, Y) \end{cases}$$

这里 $F_2(X, Y), G_2(X, Y)$ 为 (X, Y) 上的光滑函数且至少为三阶的.

再作变换

$$\begin{cases} \mu = X + MX^2 + QXY \\ v = Y + RX^2 + UXY \end{cases}$$

则系统变为

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{dt} = v + F_3(\mu, v) \\ \frac{dv}{dt} = \rho_1\mu^2 + \rho_2\mu v + G_3(\mu, v) \end{cases}$$

这里 $F_3(\mu, v), G_3(\mu, v)$ 为 (μ, v) 上的光滑函数且至少为三阶的. 因 $\rho_1\rho_2 \neq 0$, 故平衡点 $\bar{E}_2$ 是余维 2 的尖点 (BT 分支奇点).

1.3 $\bar{E}_3$ 的稳定性

定理 3 当系统(3) 满足条件:

- 1) $\Delta > 0, mb < \epsilon\Lambda a_0$;
- 2) $\text{tr}J(\bar{E}_3) < 0$ 且 $\det J(\bar{E}_3) > 0$;
- 3) $[2a_0a_1b + \alpha(b+m)]^2 < 4a_0a_1b^2(a_0a_1 + \alpha)$.

则正平衡点 $\bar{E}_3$ 是全局渐近稳定的.

证 由计算易知, 当满足条件 1) 时, 系统(3) 仅有一个正平衡点 $\bar{E}_3$, 且此时 $\bar{E}_1$ 是不稳定的. 易知, 区域 $\mathbb{W} = \{(N, P) \mid N \leq \frac{\Lambda}{b}, P \geq 0\}$ 是系统(3) 的正向不变集; 当满足条件 2) 时, 平衡点 $\bar{E}_3$ 是局部渐近稳定的. 记

$$\begin{cases} f(N, P) = \Lambda - a(P)NP - bN \\ g(N, P) = \epsilon a(P)NP - mP \end{cases} \quad (5)$$

构造 Dulac 函数

$$B(N, P) = \frac{1 + a_1P}{[a_0 + (a_0a_1 + \alpha)P]P}$$

则

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial N} + \frac{\partial(Bg)}{\partial P} = -1 - \frac{a_1b(a_0a_1 + \alpha)P^2 + [2a_0a_1b + \alpha(b+m)]P + a_0b}{[a_0 + (a_0a_1 + \alpha)P]^2P}$$

当满足条件 3) 时, $\frac{\partial(Bf)}{\partial N} + \frac{\partial(Bg)}{\partial P} < 0$, 因此系统(3) 在区域 $\mathbb{W}$ 上不存在极限环. 又因在题设条件下 $\bar{E}_3$ 是唯一局部稳定的平衡点, 由 Bendixson-Dulac 判别法^[7] 知, 平衡点 $\bar{E}_3$ 是全局渐近稳定的.

1.4 Hopf 分支

由计算可知 $\det J(\bar{E}_4) < 0, \det J(\bar{E}_5) > 0$. 因此, 捕食者数更小的平衡点 $\bar{E}_4$ 为鞍点, 相对捕食者数较大的 $\bar{E}_5$ 为结点、焦点或中心, 这都取决于 $\text{tr}J(\bar{E}_5)$ 的值. 可得结论:

- 1) 当 $\text{tr}J(\bar{E}_5) > 0$ 时, $\bar{E}_5$ 为不稳定焦(结)点;
- 2) 当 $\text{tr}J(\bar{E}_5) < 0$ 时, $\bar{E}_5$ 为稳定焦(结)点;

3) 当 $\text{tr} \mathbf{J}(\bar{E}_5) = 0$ 时, $\bar{E}_5$ 为细焦点或中心.

定理 4 设捕食强度 α 经过一个临界值 α^* , α^* 满足 $\text{tr} \mathbf{J}(\bar{E}_5) = 0$, 系统(3)在正平衡点 $\bar{E}_5$ 处产生 Hopf 分支.

证 因 $\alpha = \alpha^*$ 时, $\text{tr} \mathbf{J}(\bar{E}_5) = 0$, 此时可得纯虚的特征根 $\lambda_{1,2}(\alpha) = \pm i \sqrt{\det \mathbf{J}(\bar{E}_5)}$, 要证明 Hopf 分支存在, 只需证 $\left[\frac{d \text{Re}(\lambda_j(\alpha))}{d\alpha} \right]_{\alpha=\alpha^*} \neq 0, j = 1, 2$. 对于特征方程 $\lambda^2 - \text{tr}(\alpha)\lambda + \det(\alpha) = 0$, 特征根的一般形式为 $\lambda_{1,2}(\alpha) = u(\alpha) \pm i v(\alpha)$. 经计算得 $\left[\frac{d \text{Re}(\lambda_j(\alpha))}{d\alpha} \right]_{\alpha=\alpha^*} = \frac{\text{tr}'(\alpha^*)}{2} \neq 0$, 定理得证.

相较于文献[4]中取线性攻击率函数($a_1 = 0$)所得结果, 本节($a_1 > 0$)得到如下结果:

1) 当捕食者死亡率较小 ($m < \frac{\epsilon \Delta a_0}{b}$) 时, 捕食者在缺少合作的情况下和食饵能够共存. 随着合作捕猎的增强, 捕食者与食饵仍共存, 且因食饵的常数补入, 即使合作强度过大食饵种群仍不会灭绝, 系统能保持共存状态.

2) 当捕食者死亡率适中 ($m > \frac{\epsilon \Delta a_0}{b}$ 且 $\Delta > 0$) 时, 则捕食者种群在缺少合作的情况下无法持续. 随着合作捕猎的增强, 捕食者种群能够持续. 此时出现双稳, 即捕食者灭绝稳定和以下两种情况之一:

① 捕食者食饵稳定共存 ($\bar{E}_5$);

② 捕食者食饵振荡共存 ($\bar{E}_5$ 经参数扰动产生极限环).

3) 当捕食者死亡率较大 (m 满足 $\Delta \geq 0$) 时, 即使合作捕猎足够强, 捕食者仍不能持续.

2 有病系统

考虑系统(2)中 $i \neq 0$ 得:

1) 平衡点 $E_1 \left(\frac{\Delta}{b}, 0, 1 \right)$ 为系统始终存在的平衡点, 且是不稳定的, 即捕食者存在疾病并不会导致种群灭绝. 由特征值法易知, 当 $m > \frac{\epsilon \Delta a_0}{b}$ 时系统(2)的无病平衡点 $E_1 \left(\frac{\Delta}{b}, 0, 0 \right)$ 是稳定的, 即在此条件下 $i \rightarrow 0$.

2) 当 $[\epsilon \Delta \beta - m(m + \mu)]a(P^*, i^*) - mb\beta > 0$ 时, 系统(2)存在唯一的正平衡点 $E^*(N^*, P^*, i^*)$. 该平衡点为唯一的捕食者-食饵-疾病共存平衡点, 因计算量过大, 它的稳定性判断较为复杂, 下面仅给出它局部稳定的条件.

定理 5 系统(2)的正平衡点 $E^* = (N^*, P^*, i^*)$ 是局部渐近稳定的当且仅当满足条件: $\sigma_k > 0 (k = 1, 2, 3)$, $\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3 > 0$. σ_k 在证明中给出.

证 设在平衡点 $E^* = (N^*, P^*, i^*)$ 的雅可比矩阵为 $\mathbf{J}(E^*)$, 进而可得雅可比行列式的特征方程

$$\lambda^3 + \sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda + \sigma_3 = 0 \quad (6)$$

则当 $\sigma_k > 0 (k = 1, 2, 3)$, $\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3 > 0$ 时, 由 Routh-Hurwitz 知系统(2)的正平衡点 E^* 是稳定的.

不同于文献[4]得出的结果, 系统(2)中捕食者不会因为疾病而导致种群灭绝, 且当满足条件 $m > \frac{\epsilon \Delta a_0}{b}$ 时, 疾病消失, 系统中仅剩食饵种群. 定理 5 给出了捕食者-食饵-疾病稳定共存的条件, 此时疾病能够得以持续. 考虑到通过数值模拟发现周期解存在的情况, 可能产生 Hopf 分支, 此时三者振荡共存.

3 讨论

本文建立了具有合作行为的捕食者患病的生态流行病模型. 首先讨论了无病子模型的动力学性质, 得到了模型(3)的边界平衡点 $\bar{E}_1$ 的全局渐近稳定性; 其次证明了适当条件下在平衡点 $\bar{E}_2$ 处产生 BT 分支的情况; 接着定理 3 利用 Dulac 函数证明在一定条件下正平衡点 $\bar{E}_3$ 是全局渐近稳定的, 说明了产生 Hopf 分支的情况. 在全模型当中, 考虑疾病存在的情况, 得到的无捕食者平衡点, 由特征值法易判断它是不稳定的, 因此捕食者不会因为疾病而导致种群灭绝. 3 者共存的平衡点未给出详细的分析过程, 将在后续的研究中继续探讨.

参考文献:

- [1] ANDERSON R M, MAY R M, JOYSEY K, et al. The Invasion, Persistence and Spread of Infectious Diseases within Animal and Plant Communities and Discussion [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1986, 314(1167): 533-570.
- [2] BATE A M, HILKER F M. Disease in Group-Defending Prey Can Benefit Predators [J]. Theoretical Ecology, 2014, 7(1): 87-100.
- [3] 刘贤宁. 一类两种群都染病的捕食-食饵模型分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(5): 94-100.
- [4] HILKER F M, PALIGA M, VENTURINO E. Diseased Social Predators [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2017, 79(10): 2175-2196.
- [5] TEIXEIRA A M, HILKER F M. Hunting Cooperation and Allee Effects in Predators [J]. Journal of Theoretical Biology, 2017, 419: 13-22.
- [6] KUMAR D, CHAKRABARTY S P. A Predator-Prey Model with Additional Food Supply to Predators: Dynamics and Applications [J]. Computational and Applied Mathematics, 2016, 37(1): 1-22.
- [7] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 46-204.

Analysis of an Eco-Epidemiological Model with Cooperative Behavior and Predator Morbidity

ZHANG Pan, WANG Wen-di, XIANG Qian

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a predator-prey model with predator disease has been studied, and the cooperative predator behavior been considered. Firstly, the dynamic properties of the disease-free sub-model have been discussed. By constructing a suitable Lyapunov function, the global stability of the boundary equilibrium point has been proved. By using Dulac function, only one positive equilibrium point has been discussed. The global stability of Hopf bifurcation has been discussed. Secondly, the equilibrium point of the three coexistence in the diseased system has been discussed. The stability condition of the coexistence equilibrium point has been obtained by using Hurwitz criterion.

Key words: Lyapunov function; Dulac function; global stability; Hopf bifurcation

责任编辑 张 枸