DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.05.005

关于格雷码变化序的一个结论[①]

刘春华，　包小敏

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 提出了码字的变化矩阵的概念，借助此概念证明了格雷码变化序的一个重要结论，从而得到一个构造某些特殊格雷码的方法.

关　键　词： 变化矩阵；格雷码；变化序

中图分类号：O211.4　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)05-0024-04

格雷码在计算机科学中非常实用，它可以大大减少电路由一个状态到下一个状态过程中产生的混淆，并且它在信息量转换过程中误码率低，容易将物理信号转换为电信号，在水位测量、气象观测等方面都有着广泛应用. 而均衡格雷码等一些特殊的格雷码具有更好的可靠性和稳定性. 由于格雷码相邻码字间只有 1 个位置不同，用数列的形式(变化序)去表示一个格雷码显得十分的简便[1-9]. 我们也可以把格雷码看作一个哈密尔顿圈[10]. 本文利用文献[2]的方法，并通过引入变化矩阵研究格雷码的变化序，给出了格雷码变化序的一个结论，它可以由一个特殊的格雷码变化序生成另一个格雷码的变化序，该结论能用于构造一些特殊类型的格雷码 .

1　变化矩阵及其行变换

定义 1　把 2^n 个二进制 n 元组有顺序地放在一起，构成一个排列，称这个排列为 n 阶全码.

定义 2　若一个 n 阶全码相邻的码字只有一个元素不同，称这个全码为 n 阶格雷码.

由于格雷码相邻的码字只有一个元素不同，我们用一个数字表示相邻码字不同的元素所在的位置(一个二进制 n 元组的位置从右往左用数字 1 到 n 来表示)，这些数字构成一个数列，称为格雷码的变化序.

而全码相邻的码字往往有多个元素不同，我们用变化矩阵来刻画全码相邻码字的变化.

定义 3　将一个 n 阶全码的 $k(k=2^n)$ 个码字均以行向量的形式表示，把这 k 个行向量拼成一个 k 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}_{k\times n}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为这个全码的码字矩阵.

定义 4　$\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶全码的码字矩阵，它的 k 个行向量分别记为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$，定义

$$\boldsymbol{a}_{i+1}\oplus\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,k-1),\ \boldsymbol{a}_1\oplus\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{b}_k$$

将 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k$ 拼成一个 k 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{B}_{k\times n}$，称 $\boldsymbol{B}$ 为这个全码对应的变化矩阵.

若一个变化矩阵每行只有一个元素为 1，其余元素全为 0，则它对应的全码为格雷码. 把每行 1 所在的列标(矩阵列标从右往左记为 1 到 n)依次写成一个数列，即为格雷码的变化序. 反过来，格雷码的变化序对应着一个变化矩阵.

定义 5　对一个全码的变化矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作如下行变换：

---

① 收稿日期：2018-06-08

基金项目：国家自然科学基金项目(61462016).

作者简介：刘春华(1994-)，男，硕士研究生，主要从事编码理论和密码学的研究.

通信作者：包小敏，博士，教授.

$$\boldsymbol{b}'_{i-1} = \boldsymbol{b}_{i-1} \oplus \boldsymbol{b}_i \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_{j-1}$$
$$\boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{b}_{i+1} \oplus \boldsymbol{b}_{i+2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_{j-1}$$
$$\boldsymbol{b}'_{j-1} = \boldsymbol{b}_i \oplus \boldsymbol{b}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_{j-2}$$
$$\boldsymbol{b}'_j = \boldsymbol{b}_i \oplus \boldsymbol{b}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_j$$

其余行不变，得到矩阵 $\boldsymbol{B}'$，称对变化矩阵进行了一次(i,j)行变换.

定理 1　对一个全码的变化矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行一次(i,j)行变换后，得到的矩阵 $\boldsymbol{B}'$ 仍然是一个全码的变化矩阵.

证　设一个全码的全码矩阵为 $\boldsymbol{A}$，对应的变化矩阵为 $\boldsymbol{B}$. 显然，一个全码交换第 i 个码字和第 j 个码字后仍然是一个全码，因此，交换全码矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}_j$，得到矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 仍然是一个全码矩阵. 且有

$$\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_j,\ \boldsymbol{a}'_j = \boldsymbol{a}_i$$

设 $\boldsymbol{A}'$ 对应的变化矩阵为 $\boldsymbol{B}'$，根据变化矩阵的定义：$\boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{a}'_{i+1} \oplus \boldsymbol{a}'_i$，$\boldsymbol{B}'$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不同的行有四行：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}'_{i-1} = {} & \boldsymbol{a}'_i \oplus \boldsymbol{a}'_{i-1} = \boldsymbol{a}_j \oplus \boldsymbol{a}_{i-1} = \boldsymbol{a}_j \oplus (\boldsymbol{a}_i \oplus \boldsymbol{b}_{i-1}) = \\ & \boldsymbol{a}_j \oplus (\boldsymbol{a}_{i+1} \oplus \boldsymbol{b}_i) \oplus \boldsymbol{b}_{i-1} = \cdots = \\ & \boldsymbol{a}_j \oplus (\boldsymbol{a}_j \oplus \boldsymbol{b}_{j-1}) \oplus \boldsymbol{b}_{j-2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_i \oplus \boldsymbol{b}_{i-1} = \\ & \boldsymbol{b}_{i-1} \oplus \boldsymbol{b}_i \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_{j-1}\end{aligned}$$

类似地，可以得到

$$\boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{b}_{i+1} \oplus \boldsymbol{b}_{i+2} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_{j-1}$$
$$\boldsymbol{b}'_{j-1} = \boldsymbol{b}_i \oplus \boldsymbol{b}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_{j-2}$$
$$\boldsymbol{b}'_j = \boldsymbol{b}_i \oplus \boldsymbol{b}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{b}_j$$

变化矩阵 $\boldsymbol{B}'$ 正是由 $\boldsymbol{B}$ 进行一次(i,j)行变换得到，结论得证.

2　关于格雷码变化序的构造的 3 个结论

下面介绍 3 个定理，都是由一个格雷码的变化序构造另一个格雷码的变化序. 其中前两个定理是通过构造新的格雷码得出，最后一个是本文的主要结论，利用变化矩阵给出证明.

定理 2　若 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是一个 n 阶格雷码的变化序，则 $c_2, \cdots, c_k, c_1$ 也是一个 n 阶格雷码的变化序.

证　设有一个 n 元组是一个 n 阶格雷码，其变化序是 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，码字矩阵为 $\boldsymbol{A}$，先把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行移到最后一行，再把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行中元素为 1 所在的列做一次异或. 根据格雷码的定义易知，所得到的矩阵仍然是一个格雷码的码字矩阵，且第一行为全零向量，其变化序为 $c_2, \cdots, c_k, c_1$.

定理 3　若 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是一个 n 阶格雷码的变化序，则 $c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}, n+1, c_{k-1}, \cdots, c_2, c_1, n+1$ 是一个 $n+1$ 阶格雷码的变化序.

证　设有一个 n 元组是一个 n 阶格雷码，其变化序是 $c_1, c_2, \cdots, c_k$. 在每个 n 元组的最左端添加一个 0，然后，以 n 阶格雷码所给顺序的相反顺序列出 n 元组，并把 1 添加到各 n 元组的最左端. 根据格雷码的定义，容易看出按上述方法构造的是一个 $n+1$ 阶格雷码，且其变化序为 $c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}, n+1, c_{k-1}, \cdots, c_2, c_1, n+1$.

既然格雷码的变化矩阵与变化序是一一对应的，我们可以将一个格雷码的变化序写成变化矩阵，并对它做一系列的(i,j)行变换，所得到的变化矩阵如果每行也只有一个元素为 1，那么说明它是另一个格雷码的变化矩阵. 将它写成数列形式，则必为一个格雷码的变化序.

定理 4　若 $c_1, \cdots, c_{i-t}, \cdots, c_i, \cdots, c_{i+t}, \cdots, c_{k-1}, n+1, c_{k-1}, \cdots, c_{i+t}, \cdots, c_i, \cdots, c_{i-t}, \cdots, c_1, n+1$ 是一个 $n+1$ 阶格雷码的变化序，且满足 $c_{i-1} = c_{i+1}, c_{i-2} = c_{i+2}, \cdots, c_{i-t} = c_{i+t}$，则将此变化序前半部分的 $c_{i-t}, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_{i+t}$ 删除，并在后半部分的 $c_{i+t}, \cdots, c_i, \cdots, c_{i-t}$ 中每两个间各嵌入一个 $n+1$ 后得到的数列：$c_1, \cdots, c_{i-t-1}, c_i, c_{i+t+1}, \cdots, c_{k-1}, n+1, c_{k-1}, \cdots, c_{i+t}, n+1, c_{i+t-1}, \cdots, n+1, c_i, n+1, \cdots, c_{i-t+1}, n+1, c_{i-t}, \cdots, c_1, n+1$ 也是一个 $n+1$ 阶格雷码的变化序.

证　设有一个 $n+1$ 阶格雷码，它的变化序是

$$c_1, \cdots, c_{i-t}, \cdots, c_i, \cdots, c_{i+t}, \cdots, c_{k-1}, n+1, c_{k-1}, \cdots, c_{i+t}, \cdots, c_i, \cdots, c_{i-t}, \cdots, c_1, n+1$$

将它写成变化矩阵的形式，记为 $\boldsymbol{B}$，记 $\boldsymbol{B}$ 的行向量为 $b_1, b_2, \cdots, b_{2k}$，则满足

$$\boldsymbol{b}_{i-m}=\boldsymbol{b}_{i+m}(1\leqslant m\leqslant t)\qquad \boldsymbol{b}_{k+n}=\boldsymbol{b}_{k-n}(1\leqslant n\leqslant k-1)$$

对变化矩阵$\boldsymbol{B}$依次做$(i-t+1,\ i+t+1)$行变换,$(i-t+2,\ i+t+2)$行变换,$(i-t+3,\ i+t+3)$行变换,……,$(2k-i-t-1,\ 2k-i+t+1)$行变换.根据定理1,所得到的矩阵$\boldsymbol{B}'$也是一个变化矩阵.

在做$(i-t+1,\ i+t+1)$行变换时,

$$\boldsymbol{b}'_{i-t}=\boldsymbol{b}_{i-t}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{b}_i\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{b}_{i+t}=\boldsymbol{b}_i$$

之后所做的行变换中,第$i-t$行不会再变,即$\boldsymbol{b}'_{i-t}=\boldsymbol{b}_i$.

在做$(i-t+1,\ i+t+1)$行变换时,

$$\boldsymbol{b}^*_{i-t+1}=\boldsymbol{b}_{i-t+2}\oplus\cdots\oplus+\boldsymbol{b}_{i+t}$$

在做$(i-t+2,\ i+t+2)$行变换时,

$$\boldsymbol{b}'_{i-t+1}=\boldsymbol{b}^*_{i-t+1}\oplus\boldsymbol{b}_{i-t+2}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{b}_{i+t}\oplus\boldsymbol{b}_{i+t+1}=\boldsymbol{b}_{i+t+1}$$

之后所做的行变换中,第$i-t+1$行不会再变,即$\boldsymbol{b}'_{i-t+1}=\boldsymbol{b}_{i+t+1}$.

依次类推,可以发现$\boldsymbol{B}'$中每个行向量都是$\boldsymbol{B}$中的某个行向量,即$\boldsymbol{B}'$每行恰有一个元素为1,其余元素为0.因此它是一个格雷码的变化矩阵,将它写成变化序为:$c_1,\cdots,c_{i-t-1},c_i,c_{i+t+1},\cdots,c_{k-1},n+1,c_{k-1},\cdots,c_{i+t},n+1,c_{i+t-1},\cdots,n+1,c_i,n+1,\cdots,c_{i-t+1},n+1,c_{i-t},\cdots,c_1,n+1$.

3 应用举例

有了上节的3个结论,可以构造一些特殊类型的格雷码的变化序,现以构造均衡格雷码为例.先介绍格雷码的变化数和均衡格雷码的定义.

定义6 设一个n阶格雷码的变化序为$c_1,c_2,\cdots,c_k$,则称$(d_n,\ d_{n-1},\ \cdots,\ d_1)$为此格雷码的变化数,其中$d_i$为变化序$c_1,c_2,\cdots,c_k$中$i$出现的次数.

定义7 若一个n阶格雷码的变化数$(d_n,\ d_{n-1},\ \cdots,\ d_1)$满足$|d_i-d_j|\leqslant 2$,$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$.则称此格雷码为均衡格雷码.

下面介绍一个构造均衡格雷码的实例,3阶反射格雷码的变化序:

1,2,1,3,1,2,1,3

它的变化数为(2,2,4),是一个均衡格雷码.利用定理2可知2,1,3,1,2,1,3,1是一个3阶格雷码的变化序,它的变化数仍为(2,2,4).利用定理3,可以构造一个4阶格雷码的变化序:

2,1,3,1,2,1,3,4,3,1,2,1,3,1,2,4

它的变化数为(2,4,4,6),利用定理4,将变化序中第一个3两边的两个1去掉,在倒数第一个3两边添加两个4,得到的仍然是一个4阶格雷码的变化序:

2,3,2,1,3,4,3,1,2,1,4,3,4,1,2,4

它的变化数为(4,4,4,4),是一个4阶均衡格雷码.利用定理3可以构造一个5阶格雷码的变化序:

2,3,2,1,3,4,3,1,2,1,4,3,4,1,2,5

2,1,4,3,4,1,2,1,3,4,3,1,2,3,2,5

它的变化数为(2,6,8,8,8),利用定理4,将变化序中第一个3两边的两个2和第一个4两边的两个3分别去掉,再在倒数第一个3和倒数第一个4两边各添加两个5,得到的仍然是一个5阶格雷码的变化序:

3,1,4,1,2,1,4,3,4,1,2,5,2,1,4,3

4,1,2,1,3,5,4,5,3,1,2,5,3,5,2,5

它的变化数为(6,6,6,6,8),是一个5阶均衡格雷码.继续利用上述方法,构造出6阶均衡格雷码,变化数为(10,10,10,12,10,12),变化序为:

3,4,2,1,3,1,5,1,4,3,4,1,2,1,3,5

4,5,3,1,2,5,3,5,2,6,2,5,3,5,2,1

3,5,4,5,3,1,2,1,4,3,4,1,2,6,5,6

2,1,4,6,3,6,4,1,2,1,6,4,6,1,3,6

类似地,可以构造更高阶的均衡格雷码,以及构造一些其它类型的对变化数有特殊要求的格雷码.

4　结束语

本文引入变化矩阵的概念去刻画码字的变化，并利用此给出了一个关于格雷码变化序构造的结论，该结论对格雷码变化序的构造有一定帮助．在研究过程中，笔者还发现了一个有趣的规律，对 R 进制的格雷码的变化矩阵实施矩阵的 3 种初等列变换，变换过后的矩阵仍然是一个 R 进制的格雷码的变化矩阵，但笔者并未给出证明．若能给出证明，利用该结论和本文给出的方法可以得出更多格雷码变化序的构造方法，有兴趣的读者可以研究这个问题．

参考文献：

[1] ROBINSON J P，COHN M. Counting Sequences [J]. IEEE Transactions on Computers，2012，30(1)：17-23.

[2] ARAZI B. An Approach for Generating Different Types of Gray Codes [J]. Information and Control，1984，63(1-2)：1-10.

[3] COHN M，EVEN S. A Gray Code Counter [J]. IEEE Transactions on Computers，1969，18(7)：662-664.

[4] GILBERT E N. Gray Codes and Paths on the n - Cube [J]. Bell Labs Technical Journal，1958，37(3)：815-826.

[5] VICKERS V E，SILVERMAN J. A Technique for Generating Specialized Gray Codes [J]. IEEE Transactions on Computers，2006，29(4)：329-331.

[6] LUDMAN J E. Gray Code Generation for MPSK Signals [J]. IEEE Transactions on Communications，1981，29(10)：1519-1522.

[7] LUDMAN J E，SAMPSON J L. A Technique for Generating Gray Codes [J]. Journal of Statistical Planning and Inference，1981，5(2)：171-180.

[8] YUEN C. Walsh Functions and Gray Code [J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility，1971，13(3)：68-73.

[9] 段延森，王　琳．格雷码的代数软判决译码研究 [J]．重庆邮电大学学报(自然科学版)，2011，23(5)：565-569.

[10] 崔　建，叶　旺．圆有向图的(1，2)步竞争图中存在哈密尔顿圈的条件 [J]．重庆工商大学学报(自然科学版)，2017，34(6)：26-31.

A Note on Gray Code Coordinate Sequence

LIU Chun-hua，BAO Xiao-min

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Gray code belongs to reliability code，which is a method of error minimization. Sometimes we need to construct some special type of gray code. In this paper，the concept of the change matrix of code has been proposed，and an important conclusion of gray code coordinate sequence is proved by this concept，and then a method to construct some special gray codes is obtained.

Key words：change matrix；gray code；coordinate sequence

责任编辑　张　枸