

裂缝多孔介质中达西流动的有限差分方法^①

陈国灿, 罗贤兵, 张校域

贵州大学 数学与统计学院, 贵阳 550025

摘要: 用差分方法来模拟二维裂缝多孔介质中的单相达西流动问题. 采用降维模型对二维区域内的裂缝进行建模, 相比整个区域而言裂缝的宽度很小并且把裂缝视为一个一维的界面, 流体通过裂缝会和周围多孔介质发生耦合现象. 在裂缝和周围多孔介质中, 流体流动均遵循达西定律和守恒定律. 采用差分方法来求解降维模型中推导的流体流动方程. 通过数值实验验证了该方法的有效性, 并证明了裂缝是快速通道还是地质屏障取决于裂缝处渗透率张量的大小.

关键词: 偏微分方程; 有限差分; 降维模型; 达西定律; 渗透率

中图分类号: O241

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2019)05-0028-06

裂缝多孔介质中流体流动的建模已成为一个重要问题. 在多孔介质中常出现两种类型的裂缝^[1-2]. 降维模型可以模拟两种类型的裂缝, 并允许穿过裂缝界面的压力不连续. 其数值方法^[3-10]已被广泛应用于裂缝多孔介质中的流体流动模型.

本文第 1 节简要描述了简化模型的推导; 第 2 节用块中心有限差分方法对该模型进行离散, 并给出一些相应的记号; 第 3 节通过数值实验来证明块中心有限差分法求解该模型的有效性, 证明了裂缝是快速通道还是地质屏障主要取决于裂缝处渗透率张量的大小.

1 问题的描述

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸域, $n = 2$ 或 3 , 定义 $\Gamma = \partial\Omega$ 是 Ω 的边界. 设在 Ω 中的流动遵循质量守恒和达西定律:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = q & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla p & \text{in } \Omega \\ p = p_b & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

其中: p 是压强, $\mathbf{u}$ 是达西速度, $\mathbf{K}$ 是渗透率张量($\mathbf{K}$ 是对角的, 且里面的元素都非零), q 是源项, p_b 是在边界 Γ 上给定的压强. 假设在多孔介质 Ω 中存在单一的裂缝 Ω_f 将 Ω 分为 3 个连续的子区域(图 1), 其中: d 表示裂缝的宽度; Γ_i 表示位于 Γ 上 Ω_i 的部分边界, $i = 1, 2, f$; $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Gamma$; γ_i 表示裂缝 Ω_f 和 Ω_i 的共同边界部分; $\gamma_i = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_f \cap \Omega$, $i = 1, 2$; $\mathbf{n}_i$ 表示 γ_i 的单法向量. 如果用 $p_i, u_i, \mathbf{K}_i$ 和 q_i 分别表示 $p, u, \mathbf{K}$ 和 q 对 Ω_i 的限制, $i = 1, 2, f$, p_b 表示 p_b 在边界 Γ_i 上的限制, 则式(1)可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u}_i = q_i & \text{in } \Omega_i, i = 1, 2, f \\ \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \nabla p_i & \text{in } \Omega_i, i = 1, 2, f \\ p_i = p_b & \text{on } \Gamma_i, i = 1, 2, f \\ p_i = p_f & \text{on } \gamma_i, i = 1, 2 \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} & \text{on } \gamma_i, i = 1, 2 \end{cases} \quad (2)$$

① 收稿日期: 2018-06-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(11461013).

作者简介: 陈国灿(1992-), 男, 硕士研究生, 主要从事微分方程数值解研究.

通信作者: 罗贤兵, 博士, 教授.

通过传统的非重叠域分解方法求解式(2)时, Ω_f 可以简单视为 Ω 的一个子域并在 Ω_f 处进行局部细化.

将 Ω_f 视为 Ω_1 和 Ω_2 之间的一个界面, 来模拟裂缝就不需要对裂缝处的网格进行局部细化, 并且在裂缝处只需处理 $(n-1)$ 维的非线性问题, 而不需要求解原来 n 维的问题(图2).

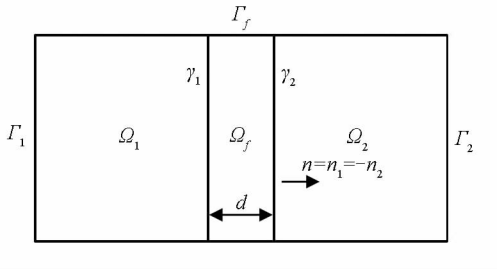


图1 区域 Ω 具有单个裂缝 Ω_f

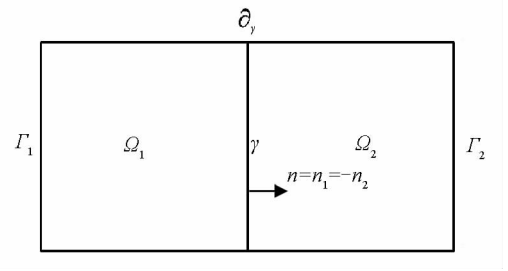


图2 子域 Ω_1, Ω_2 和被视为界面的 γ

通过对裂缝处进行平均处理建立了用界面代替子域模型. 首先分解裂缝处的速度 $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_{f,n} + \mathbf{u}_{f,\tau}$, 其中 $\mathbf{u}_{f,n} = (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$) 并定义 ∇_τ 和 div_τ 分别为切线方向的梯度算子和散度算子, ∇_n 和 div_n 为法线方向的梯度算子和散度算子. 所以式(2)的第一个方程可写为

$$\text{div}_n \mathbf{u}_f + \text{div}_\tau \mathbf{u}_f = q_f, \text{ in } \Omega_f \quad (3)$$

对式(3)在法线方向积分有

$$-\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} |_{\gamma_1} + \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} |_{\gamma_2} + \text{div}_\tau U_f = Q_f, \text{ on } \gamma \quad (4)$$

其中: $U_f = \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{u}_{f,\tau} d\mathbf{n}$, $Q_f = \int_{-d/2}^{d/2} q_f d\mathbf{n}$. 根据流体通过 γ_1 和 γ_2 的连续性条件(式(2)中最后一个方程), 可以把式(4)写成如下形式:

$$\text{div}_\tau U_f = Q_f + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 |_{\gamma_1} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 |_{\gamma_2}), \text{ on } \gamma \quad (5)$$

这是关于 γ 的守恒方程, 其中 $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 |_{\gamma_1} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 |_{\gamma_2}$ 是附加的源项, 代表在裂缝中流入和流出的差异. 对于式(2)的第二个方程可以写成:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{f,\tau} &= -K_{f,\tau} \nabla_\tau p_f, \text{ in } \Omega_f \\ \mathbf{u}_{f,n} &= -K_{f,n} \nabla_n p_f, \text{ in } \Omega_f \end{aligned} \quad (6)$$

然后对式(6)的第一个方程在法线方向积分有

$$U_f = -K_{f,\tau} d \nabla_\tau P_f, \text{ on } \gamma \quad (7)$$

其中 $P_f = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} p_f d\mathbf{n}$, d 表示原模型裂缝的宽度(通过积分产生). 式(7)是 $(n-1)$ 维 γ 上的达西定律. 现在对式(6)的第二个方程给出系统 Ω_1 和 Ω_2 沿 γ 处的边界条件, 其考虑了从 γ 的一侧到另一侧的压力差. 对第二个方程在法线方向积分有:

$$\int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{u}_{f,n} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{n} = -K_{f,n} (p_f |_{\gamma_2} - p_f |_{\gamma_1}) \quad (8)$$

用梯形公式进行近似有:

$$1/2(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 |_{\gamma_1} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 |_{\gamma_2}) = -K_{f,n} (p_2 |_{\gamma_2} - p_1 |_{\gamma_1})/d \quad (9)$$

令 $\alpha_f = 2K_{f,n}/d$, 将(9)式写成如下形式:

$$-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 |_{\gamma_1} + \alpha_f p_1 |_{\gamma_1} = \alpha_f p_2 |_{\gamma_2} - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 |_{\gamma_2} \quad (10)$$

则图2中满足的守恒方程和达西定律如下:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u}_i &= -\mathbf{K}_i \nabla p_i, & \text{in } \Omega_i \quad i=1,2 \\ \text{div } \mathbf{u}_i &= q_i, & \text{in } \Omega_i \quad i=1,2 \\ \mathbf{u}_f &= -K_{f,\tau} \nabla_\tau p_f, & \text{in } \gamma, \\ \text{div } \mathbf{u}_f &= Q_f + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 |_{\gamma_1} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 |_{\gamma_2}), & \text{in } \gamma, \\ -\xi \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i + \alpha_f \cdot p_i &= \alpha_f \cdot p_f - (1-\xi) \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j, & \text{in } \gamma, i, j=1,2, i \neq j \\ p_i &= p_b, & \text{on } \Gamma_i \quad i=1,2 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

其中:第3个方程表示沿裂缝切线方向的达西定律;第4个方程模拟了裂缝内部的质量守恒;第5个方程表示子域 Ω_i 的 Robin 边界条件^[11],与裂缝中的压强 p_f 和相邻子域 Ω_j 中的流通量有关 $i, j = 1, 2, i \neq j$. 当 ξ 取不同值时,原模型可简化为不同的问题,特别地当 $\xi = 1$ 时模型问题简化为非局部^[12] 非标准正定界面问题,并且当 $\xi \in [1/2, 1]$ 时第5个方程可以写成:

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\gamma_2} + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\gamma_1} = \alpha_f(p_2|_{\gamma_2} + p_1|_{\gamma_1} - 2p_f)/(2\xi - 1) \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\gamma_2} - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\gamma_1} = \alpha_f(p_2|_{\gamma_2} - p_1|_{\gamma_1}) \quad (13)$$

降维模型式(11)可以在不损失裂缝介质的物理性质的情况下降低计算成本.

2 块中心有限差分方法

考虑在一个矩形区域 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ 内,被裂缝 $\Omega_f = \{x_f\} \times [c, d]$ 分为两个子区域^[13-15] $\Omega_1 = [a, x_f] \times [c, d]$ 和 $\Omega_2 = (x_f, b] \times [c, d]$. 对于一维裂缝,有如下划分:

$$\delta_y: c = y_{1/2} < y_{3/2} < \cdots < y_{N_y-1/2} < y_{N_y+1/2} = d$$

二维区域 Ω_1 和 Ω_2 分别划分为 $\delta_{1x} \times \delta_y$ 和 $\delta_{2x} \times \delta_y$:

$$\delta_{1x}: a = x_{1/2} < x_{3/2} < \cdots < x_{\hat{N}_x-1/2} < x_{\hat{N}_x+1/2} = x_f$$

$$\delta_{2x}: x_f = x_{\hat{N}_x+1/2} < x_{\hat{N}_x+3/2} < \cdots < x_{N_x-1/2} < x_{N_x+1/2} = b$$

令 $s = 1, \cdots, N_x, l = 1, \cdots, N_y$, 定义如下记号:

$$x_s = (x_{s-1/2} + x_{s+1/2})/2 \quad y_l = (y_{l-1/2} + y_{l+1/2})/2$$

$$h_s = x_{s+1/2} - x_{s-1/2} \quad k_l = y_{l+1/2} - y_{l-1/2}$$

$$h_{s+1/2} = (h_{s+1} + h_s)/2 = x_{s+1} - x_{s-1/2} \quad k_{l+1/2} = (k_{l+1} + k_l)/2 = y_{l+1} - y_l$$

对于函数 $\psi(x, y)$ 定义 $\psi_{i,j}$ 为 $\psi(x_i, y_j)$, 其中 i 可以取值 s 或者 $s+1/2, j$ 可以取值 l 或者 $l+1/2$. 在适当点处的离散形式如下:

$$[d_x \psi]_{s+1/2, l} = (\psi_{s+1, l} - \psi_{s, l})/h_{s+1/2} \quad [d_y \psi]_{s, l+1/2} = (\psi_{s, l+1} - \psi_{s, l})/k_{l+1/2}$$

$$[D_x \psi]_{s, l} = (\psi_{s+1/2, l} - \psi_{s-1/2, l})/h_s \quad [D_y \psi]_{s, l} = (\psi_{s, l+1/2} - \psi_{s, l-1/2})/k_l$$

其中 h 和 k 分别为 x 方向和 y 方向的步长. 在裂缝中 $u_{1, \hat{N}_x+1/2, l}^x$ 和 $u_{2, \hat{N}_x+1/2, l}^x$ 的值一般是不相等的. 运用上面的记号, 用 $u_{i, s+1/2, l}^x, u_{i, s, l+1/2}^y, p_{i, s, l}, u_{f, \hat{N}_x+1/2, l+1/2}, p_{f, \hat{N}_x+1/2, l}$ 来近似 $u_i^x(x_{s+1/2}, y_l), u_i^y(x_s, y_{l+1/2}), p_i(x_s, y_l), u_f(x_{\hat{N}_x+1/2}, y_{l+1/2}), p_f(x_{\hat{N}_x+1/2}, y_{l+1/2})$ 其中 $i = 1, 2$, 则方程(11) 可以写成如下形式:

$$\begin{cases} [D_x u_i^x]_{s, l} + [D_y u_i^y]_{s, l} = q_{i, s, l} \\ u_{i, s+1/2, l}^x = -K_i^x [d_x p_i]_{s+1/2, l} \\ u_{i, s, l+1/2}^y = -K_i^y [d_y p_i]_{s, l+1/2} \\ [D_y u_f]_{\hat{N}_x+1/2, l} = q_{i, \hat{N}_x+1/2, l} + u_{1, \hat{N}_x+1/2, l}^x - u_{2, \hat{N}_x+1/2, l}^x \\ u_{f, \hat{N}_x+1/2, l+1/2} = -K_{f, y} d [d_x p_f]_{\hat{N}_x+1/2, l+1/2} \\ u_{1, \hat{N}_x+1/2, l}^x - u_{2, \hat{N}_x+1/2, l}^x = \alpha_f (p_{1, \hat{N}_x+1/2, l} + p_{2, \hat{N}_x+1/2, l} - 2p_{f, \hat{N}_x+1/2, l})/(2\xi - 1) \\ u_{1, \hat{N}_x+1/2, l}^x + u_{2, \hat{N}_x+1/2, l}^x = \alpha_f (p_{1, \hat{N}_x+1/2, l} - p_{2, \hat{N}_x+1/2, l}) \end{cases}$$

(14) 式加上边界条件就可以构成一个封闭的系统. 在(14) 式中我们需要利用裂缝周围介质的压力来构造有限差分格式,但是它们又不是在裂缝处上定义的,所以需要插值来近似 $p_{1, \hat{N}_x+1/2, l}$ 和 $p_{2, \hat{N}_x+1/2, l}$ 的值. 很显然该差分方法具有二阶的精度.

3 数值实验

例 1 如图 3 所示, 裂缝划分的两个区域分别为 $\Omega_1 = [0, 1-d/2] \times [0, 1], \Omega_2 = [1+d/2, 2] \times [0,$

1]. 在裂缝处的渗透率为 $\mathbf{K}_f = K\mathbf{I}$, 在其它区域的渗透率是各向同性的常数: $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{I}$. 裂缝的宽度为 d , 源项为 0, $q_i = 0, i = 1, 2, f$. 在裂缝处给出第一类边界条件, 其中 $\mathbf{I}$ 是二维的单位矩阵, K 是一个大于 1 的参数. 这意味着, 流体快速通过裂缝.

图 4 为裂缝处局部细化的网格结果 ($K = 100, d = 0.01$), 图 5 为降维模型块中心有限差分的数值结果 ($K = 100, d = 0.01, \xi = 2/3$).

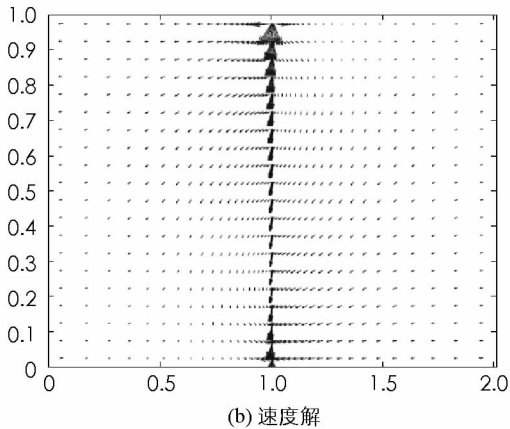
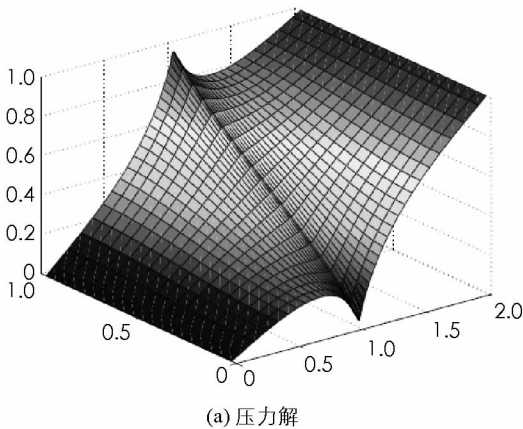


图 4 裂缝处局部细化

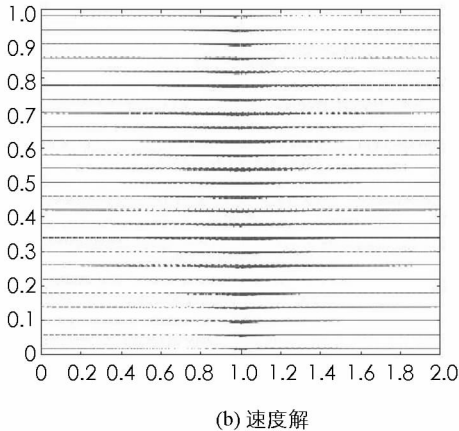
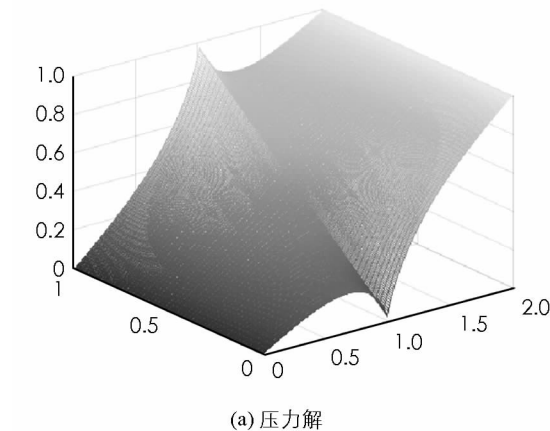


图 5 降维模型块中心有限差分的数值结果

例 2 如图 6 所示, 考虑裂缝在 $\{1\} \times ([0, 1/4] \cup [3/4, 4])$ 处的渗透率为 $\mathbf{K}_{f1} = K_f\mathbf{I}$, $K_f = 200$, 在 $\{1\} \times [1/4, 3/4]$ 处的渗透率为 $\mathbf{K}_{f2} = K_f\mathbf{I}$, 其中 $K_f = 0.001$ 在周围基质的渗透率与上一个例子一样, 在裂缝边界处给的是第二类边界条件如图 6. 用块中心有限差分方法离散降维模型并近似求解了压力图像, 如图 7 所示(其中 $d = 0.01, \xi = 2/3$).

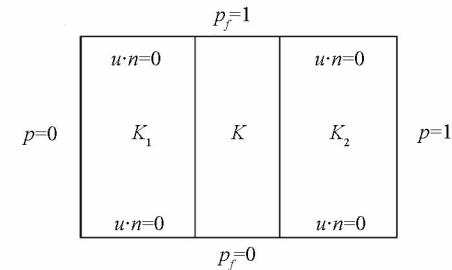


图 3 裂缝处为第一类边界条件

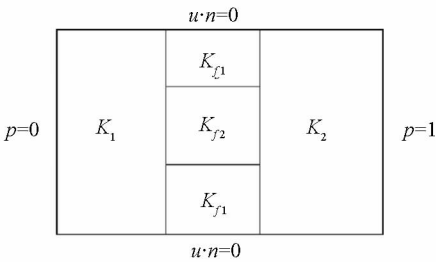


图 6 裂缝处为第二类边界

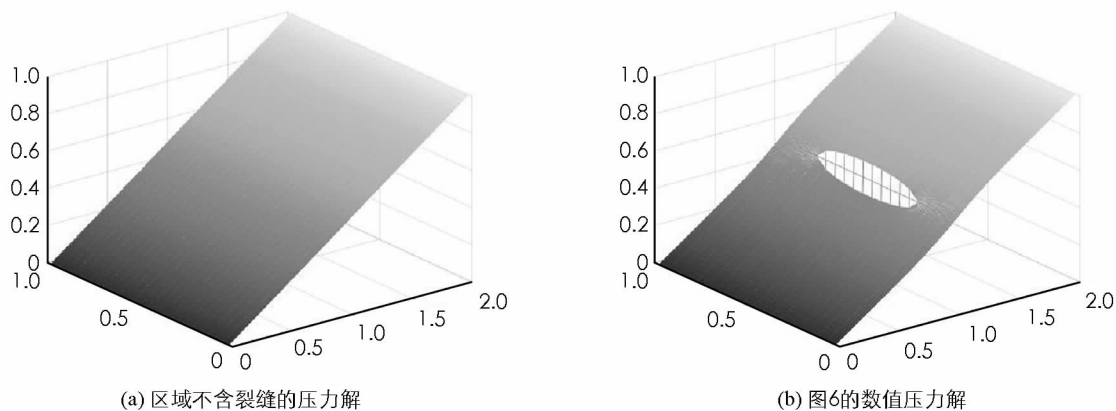


图 7 压力解

4 结 语

本文主要用块中心有限差分方法来模拟二维裂缝多孔介质中单相达西流动问题, 用一维界面来描述裂缝, 并与周围介质进行流体交换. 通过数值算例验证了该方法的有效性. 数值实验表明裂缝是否作为快速通道或地质屏障取决于裂缝处渗透率张量的大小.

参考文献:

- [1] JÉRÔME J, MARTIN V, ROBERTS J. Modeling Fractures and Barriers as Interfaces for Flow in Porous Media [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005, 26(5): 1667-1691.
- [2] ALBOIN C, JAFFRÉ J, ROBERTS J E, et al. Domain Decomposition for Some Transmission Problems in Flow in Porous Media [J]. Lecture Notes in Physics, 2000, 552: 22-34.
- [3] CHEN Z, YOU J. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs Including Fluid Flow in Matrix Blocks [J]. Transport in Porous Media, 1987, 2(2): 145-163.
- [4] FRIH N, ROBERTS J E, SAADA A. Modeling Fractures as Interfaces: a Model for Forchheimer Fractures [J]. Computational Geosciences, 2008, 12(1): 91-104.
- [5] DAWSON C, SUN S, WHEELER M F. Compatible Algorithms for Coupled Flow and Transport [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 193(23): 2565-2580.
- [6] SONG P, SUN S. Contaminant Flow and Transport Simulation in Cracked Porous Media Using Locally Conservative Schemes [J]. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2012, 4(4): 389-421.
- [7] HOTEIT H, FIROOZABADI A. An Efficient Numerical Model for Incompressible Two-Phase Flow in Fractured Media [J]. Advances in Water Resources, 2008, 31(6): 891-905.
- [8] CHEN H, SUN S. A Residual-Based a Posteriori Error Estimator for Single-Phase Darcy Flow in Fractured Porous Media [J]. Numerische Mathematik, 2016, 136(3): 1-35.
- [9] REICHENBERGER V, JAKOBS H, BASTIAN P, et al. A Mixed-Dimensional Finite Volume Method for Two-Phase Flow in Fractured Porous Media [J]. Advances in Water Resources, 2006, 29(7): 1020-1036.
- [10] ZIDANE A, FIROOZABADI A. An Efficient Numerical Model for Multicomponent Compressible Flow in Fractured Porous Media [J]. Advances in Water Resources, 2014, 74: 127-147.
- [11] 刘建康, 秦煜哲, 张晓晶, 等. Robin 型边界阻尼波动方程的有限差分格式 [J]. 贵州师范大学学报(自然版), 2016, 34(3): 48-55.
- [12] 唐之韵, 欧增奇. 一类非局部问题解的存在性与多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(4): 48-52.
- [13] LI X, RUI H. Characteristic Block-Centered Finite Difference Method for Simulating Incompressible Wormhole Propagation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2017, 73(10): 2171-2190.

- [14] WEISER A, WHEELER M F. On Convergence of Block-Centered Finite Differences for Elliptic Problems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1988, 25(2): 351-375.
- [15] ZHAO D, PAN H, RUI H. Block-Centered Finite Difference Methods for Darcy-Forchheimer Model with Variable Forchheimer Number [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2015, 31(5): 1603-1622.

Finite Difference Methods for Darcy Flow in Fracture Porous Media

CHEN Guo-can, LUO Xian-bing, ZHANG Xiao-Yu

College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Abstract: In this paper, finite different methods has been used to simulate the single phase Darcy flow in two-dimensional fractured porous media. The reduced model has been used to model the fracture in the two-dimensional region. The fractures have a small width and are treated as interfaces between subdomain media. In fracture and surrounding porous media, the fluid flow obeys Darcy's law and conservation law. The difference method has also been used to solve the fluid flow equations derived from the dimensionality reduction model. The validity of the method is verified by numerical experiments. It is demonstrated whether the fracture acts as a fast pathway or geological barrier is totally determined by the value of its permeability tensor.

Key words: partial differential equation ; finite difference; reduced model; Darcy's law; permeability

责任编辑 张 杓