DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.06.001

K_3 单群的新刻画①

陈 梦[1]， 朱 华[2]， 刘正龙[1]

1. 川北医学院 基础医学院，四川 南充 637100；2. 攀枝花学院 数学与计算机学院，四川 攀枝花 617000

摘要：设 G 是有限群，$t(G)$ 为 G 的素图连通分支数. 当 $t(G)\geqslant 2$ 时，对 K_3 单群进行研究，得到了：(i) 若 G 是有限群，M 是除 $L_2(7)$，$U_4(2)$ 的 K_3 单群，则 $G\cong M$ 当且仅当 $t(G)\geqslant 2$ 且 $|G|=|M|$；(ii) 若 G 是有限群，M 是 $L_2(7)$，$U_4(2)$ 单群，当 $t(G)\geqslant 2$ 且 $|G|=|M|$ 时，得到了群 G 的一些特征描述.

关 键 词：素图不连通；K_3 单群；有限群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2019)06-0001-04

在文中，G 为有限群，$\pi(G)$ 为 $|G|$ 的素因子的集合，$\pi_e(G)$ 为 G 的元素阶的集合，用 $\Gamma(G)$ 表示 G 的素图. 20 世纪 70 年代，K. W. Guenberg 和 O. Kegel 给出了素图的定义：顶点集为 $\pi(G)$，两顶点 m,n 有一条边(或者相连)当且仅当 $mn\in\pi_e(G)$，这种图称为群 G 的素图或者 Gruenberg-Kegel 图，记为 $\Gamma(G)$ 或 $GK(G)$. 群 G 的素图分支为 $\pi_i(G)(i=1,2,\cdots,t(G))$，这里 $t(G)$ 称为 G 的素图连通分支数. 文献[1]给出了一个素图不连通时的重要描述. 此后群论学者开始关注通过素图及 A. S. Kondrat'ev 的关于素图不连通时的有限单群的完全分类[2]来研究群. 随后，有限群的素图刻画问题(如果 $\Gamma(G)=\Gamma(H)$ 当且仅当 $G\cong H$)及有限单群的素图拟刻画问题(如果 $\Gamma(G)=\Gamma(H)$，则 G 同构于有限群 H 中的唯一非交换合成因子)等也受到了众多学者的广泛关注，得到了诸多成果[3-6]. 本文利用群的素图不连通及群的阶对 K_3 单群进行研究，得到了一些关于 K_3 单群的特征描述.

引理 1[1]　设 G 是有限群，G 的素图不连通，则 G 有如下 3 种结构：

(i) Frobenius 群；

(ii) 2-Frobenius 群；

(iii) G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 为非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，且 $|G/K|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$.

引理 2[7-8]　设 G 是偶阶 2-Frobenius 群，即 $G=ABC$，其中 $A\trianglelefteq G$，$AB\trianglelefteq G$，AB 是以 A 为核 B 为补的 Frobenius 群，BC 是以 B 为核 C 为补的 Frobenius 群，则：

$$t(G)=2\qquad \pi(A)\cup\pi(C)=\pi_1\qquad \pi(B)=\pi_2$$

且 G 是可解的，B 是 G 的 Hall 子群且是奇阶的，C 为循环群，G 含有阶为 $|C|\cdot\prod_{p\in\pi(A)}p$ 的元素.

定理 1　设 G 是有限群，M 是 K_3 单群 A_5，A_6，$L_2(8)$，$L_3(3)$，$L_2(17)$，$U_3(3)$ 中之一，则 $G\cong M$ 当且仅当 $t(G)\geqslant 2$ 且 $|G|=|M|$.

证　充分性显然成立，下证必要性. 因为方法类似，所以只讨论 $M=A_5$，$U_3(3)$ 时的情形.

情形 1　设 $t(G)\geqslant 2$，$|G|=|A_5|=2^2\cdot 3\cdot 5$. 因为 $t(G)\geqslant 2$，由引理 1 知 G 是 Frobenuis 群或者

① 收稿日期：2018-07-11

基金项目：四川省教育厅重点项目(15ZA0217)；南充市校科技战略合作专项(18SXHZ0482)；川北医学院重点项目(CBY13-A-ZP10).

作者简介：陈 梦(1991-)，男，助教，主要从事群论的研究.

通信作者：刘正龙，教授.

2-Frobenuis 群，或者 G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ 使得 K/H 为非交换单群.

若 G 是 Frobenuis 群，设 H 为其核，K 为其补. 由 Frobenuis 群的性质知：

$$(\mid H \mid, \mid K \mid) = 1 \qquad \mid K \mid \Big| (\mid H \mid - 1)$$

又因为 H 幂零，设 P 是 H 的 Sylow -子群，则 $\mid K \mid \Big| (\mid P \mid - 1)$，这与 $\mid G \mid = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ 矛盾，从而 G 不是 Frobenuis 群.

若 G 为 2-Frobenuis 群，由引理 2 知 $G = ABC$，B 是奇阶的，且：

$$t(G) = 2 \qquad \pi(A) \cup \pi(C) = \pi_1 \qquad \pi(B) = \pi_2$$

设 $\mid B \mid = 5$，由于 BC 是以 B 为核 C 为补的 Frobenius 群，故 $\mid C \mid \Big| (\mid B \mid - 1)$，即 $\mid C \mid \Big| 4$，此时 $\mid A \mid = 3, 2 \cdot 3$. 又因为 AB 是以 A 为核 B 为补的 Frobenius 群，设 P_3 是 A 的 Sylow 3 -子群，且 $\mid P_3 \mid = 3$，则 $\mid B \mid \Big| (\mid P_3 \mid - 1)$，即 $5 \mid 2$，矛盾. 设 $\mid B \mid = 3$，则 $\mid C \mid = 2$，此时 $\mid A \mid = 2 \cdot 5$，设 P_5 是 A 的 Sylow 5 -子群，且 $\mid P_5 \mid = 5$. 则 $\mid B \mid \Big| (\mid P_5 \mid - 1)$，即 $3 \mid 4$，矛盾. 设 $\mid B \mid = 3 \cdot 5$，此时，显然有 $\mid B \mid > \mid A \mid$，这与 $\mid B \mid \Big| (\mid A \mid - 1)$ 矛盾. 从而 G 不是 2-Frobenuis 群.

因此 G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 -群，K/H 为非交换单群，其中 $2 \in \pi_1$，H 为幂零群，且 $\mid G/K \mid \Big| \mid \mathrm{Out}(K/H) \mid$. 又因为 $\mid K/H \mid \Big| \mid G \mid$，由文献[9] 知 $K/H \cong A_5$. 此时

$$\mid K/H \mid = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = \mid G \mid$$

从而：

$$H = 1 \qquad G = K \cong A_5$$

情形 2 设 $t(G) \geqslant 2$，$\mid G \mid = \mid U_3(3) \mid = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$. 因为 $t(G) \geqslant 2$，由引理 1 知 G 是 Frobenuis 群或者 2-Frobenuis 群，或者 G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ 使得 K/H 为非交换单群.

用情形 1 中的方法可得 G 不是 Frobenuis 群，也不是 2-Frobenuis 群.

因此 G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 -群，K/H 为非交换单群，其中 $2 \in \pi_1$，H 为幂零群，且 $\mid G/K \mid \Big| \mid \mathrm{Out}(K/H) \mid$. 又因为 $\mid K/H \mid \Big| \mid G \mid$，由文献[9] 知

$$K/H \cong L_2(7), L_2(8), U_3(3)$$

若 $K/H \cong L_2(7)$，此时 $\mid G/K \mid \cdot \mid H \mid = 2^2 \cdot 3^2$，由于 H 和 G/K 是 π_1 -群，故 $\{2, 3\} \subseteq \pi_1$. 又因为：

$$\mid G/K \mid \Big| \mid \mathrm{Out}(K/H) \mid \qquad \mid \mathrm{Out}(L_2(7)) \mid = 2$$

从而 $\mid H \mid = 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2$. 设 P_3 是 H 的 Sylow 3 -子群，则 $\mid P_3 \mid = 3^2$，P_7 是 G 的 Sylow 7 -子群，则 $\mid P_7 \mid = 7$. 又因为 H 幂零，故 $P_3 \trianglelefteq G$. 从而把 G 的 7 阶元作用在 P_3 上，该作用是平凡的. 从而 G 中有 21 阶元，即在 $\pi(G)$ 中 3,7 相连. 由于：

$$\pi(G) = \{2, 3, 7\} \qquad \{2, 3\} \subseteq \pi_1$$

从而 $\pi(G) = \pi_1 = \{2, 3, 7\}$，因此 G 的素图 $\Gamma(G)$ 连通，矛盾.

若 $K/H \cong L_2(8)$，与 $K/H \cong L_2(7)$ 时的讨论方法相同，此时 $\pi(G) = \pi_1 = \{2, 3, 7\}$，即 G 的素图 $\Gamma(G)$ 连通，矛盾.

若 $K/H \cong U_3(3)$，此时

$$\mid K/H \mid = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 = \mid G \mid$$

从而：

$$H = 1 \qquad G = K \cong U_3(3)$$

定理 2 (a) 设 G 是有限群，若 $t(G) \geqslant 2$，$\mid G \mid = \mid L_2(7) \mid$，则下列之一成立：

(a_1) G 是 2-Frobenuis 群，$G \cong ABC$，其中 $A = Z_2 \times Z_2 \times Z_2$，$B = Z_7$，$C = Z_3$；

(a_2) G 是 2-Frobenuis 群，$G \cong ABC$，其中 A 为 $\mid A \mid = 2^2 \cdot 7$ 的幂零群，$B = Z_3$，$C = Z_2$；

(a_3) $G \cong L_2(7)$.

(b) 设 G 是有限群，若 $t(G) \geqslant 2$，$\mid G \mid = \mid U_4(2) \mid$，则下列之一成立：

(b_1) G 是 2-Frobenuis 群，$G\cong ABC$，其中 A 为 $|A|=2^4\cdot 3^4$ 的幂零群，$B=Z_5$，$C=Z_4$；

(b_2) $G\cong U_4(2)$.

证　因为方法类似，只讨论 $t(G)\geqslant 2$，$|G|=|L_2(7)|$ 时的情形.

设 G 是有限群，$|G|=|L_2(7)|=2^3\cdot 3\cdot 7$. 因为 $t(G)\geqslant 2$，由引理 1 知 G 是 Frobenuis 群或者 2-Frobenuis 群，或者 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ 使得 K/H 为非交换单群.

用定理 1 的情形 1 中的方法可得 G 不是 Frobenuis 群.

若 G 是 2-Frobenuis 群，由引理 2 可得 $G=ABC$，其中：

$$|A|=2^3\qquad |B|=7\qquad |C|=3$$

或：

$$|A|=2^2\cdot 7\qquad |B|=3\qquad |C|=2$$

当 $G=ABC$，$|A|=2^3$，$|B|=7$，$|C|=3$ 时，因为 G 可解，故 G 有极小正规子群 N，若 N 为 Sylow 7 -子群，把 G 中的 Sylow 2 -子群作用在 N 上，该作用是平凡的. 则 G 中有 14 阶元，即在 $\pi(G)$ 中 2,7 相连. 由于：

$$\pi(G)=\{2,3,7\}\qquad \{2,3\}\subseteq\pi_1$$

从而 $\pi(G)=\pi_1=\{2,3,7\}$，此时 G 素图连通，矛盾. 若 N 为 Sylow 3 -子群，把 G 中的 Sylow 7 -子群作用在 N 上，该作用是平凡的. 则 G 中有 21 阶元，此时 G 素图连通，矛盾. 故 N 为 Sylow 2 -子群. 若 $|N|=2$，则 $N\subseteq Z(G)$，于是 G 中有 14 阶元，此时 G 素图连通，矛盾. 若 $|N|=4$，则 $N\cong Z_2\times Z_2$，把 G 中的 Sylow 7 -子群作用在 N 上，由于

$$|\mathrm{Aut}(N)|=|GL(2,2)|=6$$

故该作用是平凡的，于是 G 中有 14 阶元，此时 G 素图连通，矛盾. 若 $|N|=8$. 则 $N\cong Z_2\times Z_2\times Z_2$. 把 G 中的 Sylow 7 -子群作用在 N 上，由于：

$$|\mathrm{Aut}(N)|=|GL(3,2)|=168\qquad 7\mid 168$$

此时该作用是非平凡的，从而 $\pi(G)$ 中 2,7 不相连. 又因为 BC 是以 B 为核 C 为补的 Frobenius 群，故 $\pi(G)$ 中 3,7 不相连. 因此 $t(G)=2$，满足条件. 此时：

$$|G|=2^3\times 3\times 7\qquad \pi_e(G)=\{1,2,3,6,7\}$$

其中 G 的 2-Sylow 子群初等交换，$B=Z_7$，$C=Z_3$.

当 $G=ABC$，$|A|=2^2\cdot 7$，$|B|=3$，$|C|=2$ 时. 由引理 2 知 G 中有 28 阶元，此时，$|G|=2^3\times 3\times 7$，其中 A 为 $|A|=2^2\cdot 7$ 的幂零群，$B=Z_3$，$C=Z_2$.

若 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 -群，K/H 为非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，且 $|G/K|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$. 又因为 $|K/H|\,\big|\,|G|$，由文献[9] 知 $K/H\cong L_2(7)$. 此时

$$|K/H|=2^3\cdot 3\cdot 7=|G|$$

从而：

$$H=1\qquad G=K\cong L_2(7)$$

推论 1　设 G 是有限群，M 是 K_3 单群 A_5,A_6,$L_2(8)$,$L_3(3)$,$L_2(17)$,$U_3(3)$ 中之一，则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$ 且 $K_1(G)=K_1(M)$.

证　充分性显然成立，下证必要性. 因为方法相同，所以只讨论 $M=A_5$ 时的情形.

设 G 是有限群，

$$|G|=|A_5|=2^2\cdot 3\cdot 5\qquad K_1(G)=K_1(A_5)=5$$

因为 $K_1(G)=5$，从而 5 是素图 $\Gamma(G)$ 的独立点. 故 $t(G)\geqslant 2$，由定理 1 得 $G\cong A_5$.

推论 2　设 G 是有限群，M 是 K_3 单群 $L_2(7)$,$U_4(2)$ 中之一，则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$ 且 $K_i(G)=K_i(M)(i=1,2)$.

证　充分性显然成立，下证必要性. 因为方法相同，所以只讨论 $L_2(7)$ 时的情形.

设 G 是有限群，

$$|G| = |L_2(7)| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$
$$K_1(G) = K_1(L_2(7)) = 7$$
$$K_2(G) = K_2(L_2(7)) = 4$$

由 $K_1(G) = 7$ 知 7 是素图 $\Gamma(G)$ 的独立点，故 $t(G) \geqslant 2$. 又因为 $K_2(G) = 4$，由定理 2 得 $G \cong L_2(7)$.

参考文献：

[1] WILLIAMS J S. Prime Graph Comfonments of Finite Group [J]. Journal of Algebra，1981，69(2)：487-513.

[2] KONDRAT'EV A S. On Prime Graph Components for Finite Simple Groups [J]. Mat Sb，1989，180(6)：787-789.

[3] HAGIE M. The Prime Graph of a Sporadic Simple Group [J]. Comm Algebra，2003，31(9)：4405-4424.

[4] KHOSRAMI B. n-Recognition by Prime Graph of the Simple Group PSL(2，q) [J]. J Algebra Appl，2008，7(6)：735-748.

[5] ZAVARNITSINE A V. Recognition of Finite Groups by the Prime Graph [J]. Algebra and Logic，2006，45(4)：220-231.

[6] 戴 雪，张庆亮. 用 $oc(G)$刻画单 K_3-群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(12)：21-24.

[7] 陈贵云. Frobenius 群和 2-Frobenius 群的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485-487.

[8] MAZUROV V D，XU M C，CAO H P. Recognition of Finite Simple Groups $L_3(2^m)$ and $U_3(2^m)$ by Their Element Orders [J]. Algebra and Logic，2000，39(5)：324-334.

[9] CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford：Clarendon Press，1985.

New Characterization of Simple K_3-Groups

CHEN Meng[1]， ZHU Hua[2]， LIU Zheng-long[1]

1．School of Basic Medical Sciences，North Sichuan Medical College，Nanchong Sichuan 637100，China；

2．School of Mathematics and Computer Science，Panzhihua University，Panzhihua Sichuan 617000，China

Abstract：Let G be a finite group，$t(G)$ is the number of connected components of prime graph of G. When $t(G) \geqslant 2$，simple K_3-groups have been studied. It has been obtained that (i) Let G be a finite group，M is a simple K_3-group except $L_2(7)$，$U_4(2)$，then $G \cong M$ if and only if $t(G) \geqslant 2$ and $|G| = |M|$；(ii) Let G be a finite group，M is $L_2(7)$，$U_4(2)$，if $t(G) \geqslant 2$ and $|G| = |M|$，some new characterize of G have been obtained.

Key words：unconnected prime graph；simple K_3-group；finite group

责任编辑 廖 坤