DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.06.002

李型单群$^2G_2(q)$阶分量刻画的简化证明①

陈彦恒, 贾松芳, 姜友谊

重庆三峡学院 数学与统计学院,重庆 万州 404100

摘要: 不使用单群分类定理,给出了 Sylow 2-子群阶数不大于 8 的有限单群的完全分类. 并在此基础上,简化了李型单群$^2G_2(q)$阶分量刻画的证明.

关 键 词: 有限单群;Sylow 2-子群;阶分量刻画

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)06-0005-05

设 n 是正整数,G 是有限群. 用 $\pi(n)$ 表示 n 的全部素因子的集合,记 $\pi(G)=\pi(|G|)$. 群 G 的素图 $\Gamma(G)$(参见文献[1])是满足如下条件的简单无向图:

(a) $\Gamma(G)$ 的顶点集为 $\pi(G)$;

(b) 在 $\Gamma(G)$ 中,两个顶点 p,q 有一条边相连当且仅当群 G 中含有 pq 阶元.

用 $t(G)$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支的个数,$\pi_i(G)$ 表示其第 i 个连通分支顶点的集合($i=1,2,\cdots,t(G)$). 特别地,当 G 是偶阶群时,总设 $2\in\pi_1(G)$. 根据 $\Gamma(G)$ 的连通分支的分类,我们可将 $|G|$ 的标准分解式写为:

$$|G|=m_1(G)m_2(G)\cdots m_{t(G)}(G)$$

其中 $\pi(m_i(G))=\pi_i(G)(i=1,2,\cdots,t(G))$. 此时把 $m_1(G),m_2(G),\cdots,m_{t(G)}(G)$ 称为群 G 的阶分量,并用 $OC(G)$ 表示群 G 的阶分量的集合,即

$$OC(G)=\{m_1(G),\ m_2(G),\ \cdots,\ m_{t(G)}(G)\}$$

群的阶分量这一概念是由陈贵云教授在研究有限单群的数量刻画问题过程中提出的,它对素图不连通图的有限单群的结构有着重要影响,很多有限单群都可以被它们自身的阶分量刻画(可参见文献[2-18]). 上述文献的证明过程无一例外都是根据有限单群的分类定理,结合给定单群的阶分量,一类一类核查排除,直至剩下目标单群. 这个过程无疑是繁琐、机械的. 如果能够根据目标单群的自身特征先对单群分类,缩小核查范围,那么肯定会简化证明过程. 本文根据目标单群$^2G_2(q)$ 的 Sylow 2-子群阶数为 8 的特点,借助于小阶 2-群的分类,不使用有限单群分类定理给出了 Sylow 2-子群阶数不大于 8 的有限单群的完全分类,与文献[2] 相比简化了李型单群$^2G_2(q)$ 阶分量刻画的证明过程.

文中其它未说明的符号和术语都是标准的,可参见文献[19-20].

1 Sylow 2-子群阶数不大于 8 的有限单群

下面不使用有限单群定理,借助于小阶 2-群的分类,给出 Sylow 2-子群阶数不大于 8 的有限单群的完

① 收稿日期:2018-10-03

基金项目:重庆市科委研究项目(CSTC2014jcyjA00009);重庆市教委科研项目(KJ1710254);重庆三峡学院重大培育项目(18ZDPY07);重庆三峡学院重点项目(14ZD16).

作者简介:陈彦恒(1980-),男,副教授,主要从事有限群的研究.

全分类.

定理 1　设 M 是有限单群. 若 M 的 Sylow 2-子群的阶数不大于 8, 则 M 同构于下列单群之一:

$L_2(8)$, A_7, J_1;

$L_2(q)$, 其中 $q \equiv 3, 5 \pmod 8$;

$L_2(q)$, 其中 $q \equiv 7, 9 \pmod{16}$;

${}^2G_2(q)$, 其中 $q = 3^{2d+1}$, $d \geqslant 1$.

证　设 M 是有限单群, S 是 M 的 Sylow 2-子群, 且 $|S| \leqslant 8$, 那么 S 仅可能同构于下列群之一:

$$Z_2, Z_4, Z_8, Z_4 \times Z_2, Z_2 \times Z_2, Z_2 \times Z_2 \times Z_2, Q_8, D_8$$

首先证明 S 不可能同构于 Z_2, Z_4, Z_8, $Z_4 \times Z_2$, Q_8. 由于 Sylow 2-子群循环的有限群是可解群, 所以 S 不可能同构于 Z_2, Z_4, Z_8. 若 $S \cong Z_4 \times Z_2$, 则 $|\mathrm{Aut}(S)| = 8$. 又由 N/C 定理知 $N_M(S) = C_M(S)$. 于是由 Burnside 定理知, S 在 M 中有正规补子群, 矛盾于 M 的单性. 若 $S \cong Q_8$, 则对于 S 仅有的 2-阶元 z, 必有 $z^M \cap S = \{z\}$, 从而由 Glauberman Z^* 定理[21] 知, M 有非平凡正规 $2'$-子群, 矛盾于 M 的单性.

其次, 如果 $S \cong Z_2 \times Z_2, Z_2 \times Z_2 \times Z_2$, 那么由 J. H. Walter 定理[22] 知, M 可能同构于下列单群之一:

$L_2(q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod 8$;

$L_2(q)$, $q = 2^n$, $n \geqslant 2$;

J_1; ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2d+1}$, $d \geqslant 1$.

由 S 的阶数及简单计算知: 当 $S \cong Z_2 \times Z_2$ 时, M 同构于 $L_2(q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod 8$; 当 $S \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ 时, M 同构于 $L_2(8), J_1, {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2d+1}$, $d \geqslant 1$.

最后, 如果 $S \cong D_8$, 那么由文献[23]的定理 2 知, M 可能同构于下列单群之一: A_7; $L_2(q)$, $q \geqslant 5$ 且 q 为奇数. 经验证, A_7 的 Sylow 2-子群同构于 D_8, 满足要求. 当 $M \cong L_2(q)$, $q \geqslant 5$ 且 q 为奇数时, $L_2(q)$ 的 Sylow 2-子群同构于 8 阶二面体群. 又由

$$|L_2(q)| = \frac{1}{2}q(q-1)(q+1)$$

及 q 为奇数知, q 必满足下列两种情形之一:

(i) $2 \nmid \frac{q-1}{2}$, $2^3 \parallel (q+1)$, $2^4 \nmid (q+1)$;

(ii) $2 \nmid \frac{q+1}{2}$, $2^3 \parallel (q-1)$, $2^4 \nmid (q-1)$.

对于情形(i), 用 16 对 $q+1$ 作整数的带余除法, 得商 m, 余数 r, 即

$$q+1 = 16m + r \qquad 0 \leqslant r \leqslant 15$$

由 q 为奇数且 $2^4 \nmid (q+1)$ 知, r 为正偶数, 即 $r = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$. 经计算, 得: 当 $r = 2, 6, 10, 14$ 时, $2 \parallel (q+1)$; 当 $r = 4, 12$ 时, $4 \parallel (q+1)$. 于是 $r = 8$ 且满足要求, 故 $M \cong L_2(q)$, $q \equiv 7 \pmod{16}$.

对于情形(ii), 用类似的方法可证 $M \cong L_2(q)$, $q \equiv 9 \pmod{16}$.

综上所述, Sylow 2-子群阶数不大于 8 的有限单群只能同构于下列单群之一:

$L_2(8)$; A_7; J_1;

$L_2(q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod 8$;

$L_2(q)$, $q \equiv 7, 9 \pmod{16}$;

${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2d+1}$, $d \geqslant 1$.

值得说明的是, 文献[24-25]也研究了 Sylow 2-子群阶数不大于 8 的有限群, 但它们对群的最高阶元的阶作了限制. 下面为了方便, 根据文献[1,26-27], 在表 1 中列出 Sylow 2-子群阶数不大于 8 的有限单群的阶分量.

表 1　Sylow 2 -子群阶数不大于 8 的有限单群的阶分量

单群	条　件	m_1	m_2	m_3	m_4
A_7		$2^3\cdot 3^2$	7	5	
J_1		$2^3\cdot 3\cdot 5$	7	11	19
$L_2(8)$		2^3	7	9	
$L_2(q)$	$q>5$，$q\equiv 5(\bmod 8)$ 或 $q\equiv 9(\bmod 16)$	$q-1$	q	$\frac{q+1}{2}$	
$L_2(q)$	$q>3$，$q\equiv 3(\bmod 8)$ 或 $q\equiv 7(\bmod 16)$	$q+1$	q	$\frac{q-1}{2}$	
${}^2G_2(q)$	$q=3^{2d+1}$，$d\geqslant 1$	$q^3(q^2-1)$	$q+\sqrt{3q}+1$	$q-\sqrt{3q}+1$	

2　${}^2G_2(q)$ 阶分量刻画的简化证明

下面借助定理 1，给出李型单群 ${}^2G_2(q)$ 阶分量刻画，即文献[2]主要定理的简化证明.

定理 2　设 G 是有限群，则 $G\cong {}^2G_2(q)$ 当且仅当 $OC(G)=OC({}^2G_2(q))$，其中 $q=3^{2d+1}$，$d\geqslant 1$.

证　必要性显然，只证充分性. 由假设 $OC(G)=OC({}^2G_2(q))$ 及表 1 知 $OC(G)=\{m_1,m_2,m_3\}$，其中：

$$m_1=q^3(q^2-1)\qquad m_2=q+\sqrt{3q}+1\qquad m_3=q-\sqrt{3q}+1$$

从而 $t(G)=3$. 由文献[28]的定理 1 和定理 2 知，G 不是 Frobenius 群也不是 2-Frobenius 群. 再由文献[1]的定理 A 知，G 有一个正规群列 $1\subseteq H\subseteq K\subseteq G$，使得 K/H 是非交换单群，H 是幂零 $\pi_1(G)$ -群，G/K 是 $\pi_1(G)$ -群且

$$K/H\leqslant G/H\leqslant \mathrm{Aut}(K/H)$$

同时 $t(K/H)\geqslant 3$，m_2，m_3 是 K/H 的奇阶分量中的两个. 由于：

$$|G|=|{}^2G_2(q)|=m_1m_2m_3\qquad 2^3\parallel |{}^2G_2(q)|$$

所以 $2^3\parallel |G|$，从而 K/H 的 Sylow 2 -子群的阶不大于 8. 据定理 1，K/H 只可能同构于下列单群：

$L_2(8)$；A_7；J_1；

$L_2(q')$，其中 $q'\equiv 3,5(\bmod 8)$；

$L_2(q')$，其中 $q'\equiv 7,9(\bmod 16)$；

${}^2G_2(q')$，其中 $q'=3^{2d'+1}$，d' 为正整数.

若 $K/H\cong L_2(8)$，则由表 1 知，$OC(K/H)=\{2^3,7,3^2\}$，从而 $m_2=q+\sqrt{3q}+1=3^2$，矛盾. 因此 K/H 不同构于 $L_2(8)$.

若 $K/H\cong A_7$，则由表 1 知，$OC(K/H)=\{2^3\cdot 3^2,7,5\}$，从而 $m_2=q+\sqrt{3q}+1=7$，$m_3=q-\sqrt{3q}+1=5$. 于是 $3q=1$，矛盾. 因此 K/H 不同构于 A_7.

若 $K/H\cong J_1$，则由表 1 知，$OC(K/H)=\{2^3\cdot 3\cdot 5,7,11,19\}$，从而 $m_2=q+\sqrt{3q}+1=11,19$. 当 $q+\sqrt{3q}+1=11$ 时，$q+\sqrt{3q}=10$，矛盾. 当 $q+\sqrt{3q}+1=19$ 时，无解，矛盾. 因此 K/H 不同构于 J_1.

若 $K/H\cong L_2(q')$，$q'\equiv 3(\bmod 8)$ 或 $q'\equiv 7(\bmod 16)$，则由表 1 知，$OC(K/H)=\left\{q'+1,q',\frac{q'-1}{2}\right\}$，从而 $m_2=q'$ 且 $m_3=\frac{q'-1}{2}$. 经计算得 $4q=3q'-5$，矛盾于 $3\mid q$. 于是 K/H 不同构于 $L_2(q')$，$q'\equiv 3(\bmod 8)$ 或 $q'\equiv 7(\bmod 16)$.

若 $K/H\cong L_2(q')$，$q'\equiv 5(\bmod 8)$ 或 $q'\equiv 9(\bmod 16)$，则由表 1 知，$OC(K/H)=\left\{q'-1,q',\frac{q'+1}{2}\right\}$，从而 $m_2=q+\sqrt{3q}+1=q'$ 且 $m_3=\frac{q'+1}{2}$. 经计算可得 $4\cdot 3^{d+1}=q'-1=4\cdot 3^{2d}$，从而 $d=1$. 于是：

$$m_1 = q^3(q^2 - 1) = 2^3 \cdot 3^9 \cdot 7 \cdot 13$$

$$m_2 = q' = q + \sqrt{3q} + 1 = 37$$

$$m_3 = q - \sqrt{3q} + 1 = 19$$

且此时$K/H \cong L_2(37)$．鉴于 $L_2(37) \leqslant G/H \leqslant \mathrm{Aut}(L_2(37)) \cong L_2(37)$ 及 H 的幂零性，通过比较阶知，H 中存在 G 的 7 阶正规子群 H_7，从而 G 的 19 阶元只能平凡地作用于 H_7．于是 G 中有 $7 \cdot 19$ 阶元，即 7 和 19 在 $\Gamma(G)$ 中连通，矛盾．因此 K/H 不同构于 $L_2(q')$，$q' \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 8)$ 或 $q' \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 16)$．

若 $K/H \cong {}^2G_2(q')$，其中 $q' = 3^{2d'+1}$，d' 为正整数，则由表 1 知，K/H 有 3 个阶分量且分别是 $q'^2(q'^2 - 1)$，$q' - \sqrt{3q'} + 1$，$q' + \sqrt{3q'} + 1$，从而：

$$m_2 = q' + \sqrt{3q'} + 1$$

$$m_3 = q' - \sqrt{3q'} + 1$$

此时必有$q = q'$，从而 $K/H \cong {}^2G_2(q)$，其中 $q = 3^{2d+1}$，d 为正整数．鉴于 $K/H \leqslant G/H \leqslant \mathrm{Aut}(K/H)$，通过比较阶知$H = 1$，从而 $G = K/H \cong {}^2G_2(q)$，其中 $q = 3^{2d+1}$，d 为正整数．

参考文献：

[1] WILLIAMS J S. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. J Algebra，1981，69(2)：487-513.

[2] 陈贵云．李型单群${}^2G_2(q)$新刻画 [C]//中国科技技术协会第二届青年学术年会四川卫星会议论文集．成都：西南交通大学出版社，1995：221-224.

[3] CHEN G Y. A New Characterization of Sporadic Simple Groups [J]. Algebra Colloquium，1996，3(1)：49-58.

[4] CHEN G Y. A New Characterization of Sporadic Simple Groups [J]. Chinese Science Bulletin，1996，41(8)：702-703.

[5] CHEN G Y. A New Characterization of Suzuki-Ree Groups [J]. Science in China(Series A)，1997，40(8)：807-812.

[6] CHEN G Y. A New Characterization of $G_2(q)$，$q \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ [J]. J of Southwest China Normal University (Natural Ed)，1996，21(3)：47-51.

[7] 陈贵云．李型单群 $G_2(q)$的阶分量刻画 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2001，26(5)：42-48.

[8] CHEN G Y. Characterization of ${}^3D_4(q)$ [J]. Southeast Asian Bulletin of Math，2002，25(3)：389-401.

[9] IRANMANESH A，ALAVI S H. A Characterization of $F_4(q)$ Where q is Even [J]. J Math Sci，2000，2(6)：853-859.

[10] IRANMANESH A，ALAVI S H. A Characterization of Simple Groups $L_5(q)$ [J]. Bull Austral Math SOC，2002，65(2)：211-222.

[11] IRANMANESH A，ALAVI S H. A Characterization of $C_2(q)$ Where $q>5$ is Even [J]. Comment Math Univ Carolinae，2002，43(1)：9-21.

[12] IRANMANESH A，ALAVI S H，KHOSRAVI B. A Characterization of $L_3(q)$ Where q is an Odd Prime Power [J]. J Pure and Applied Algebra，2002，170(2-3)：243-254.

[13] IRANMANESH A，ALAVI S H，KHOSRAVI B. A Characterization of $L_3(q)$ for $q=2^n$ [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series)，2002，18(3)：463-472.

[14] BEHROOZ K，BAHMAN K. A Characterization of $E_6(q)$ [J]. Algebra Groups and Geometries，2002，19(2)：225-243.

[15] IRANMANESH A，ALAVI S H. A Characterization of $U_5(q)$ for $q=2^n$ [J]. Internatioanl Mathematical Journal，2003，3(2)：129-141.

[16] BEHROOZ K，BAHMAN K. A Characterization of ${}^2E_6(q)$ [J]. Kumamoto J Math，2003，16(1)：1-11.

[17] CHEN G Y，SHI H G. ${}^2D_p(3)(9 \leqslant p = 2^m - 1$ Not a Prime) Can be Characterized by Its Order Component [J]. J Appl Math and Computing，2005，19(1-2)：353-362.

[18] SHI H G，CHEN G Y. ${}^2D_{p+1}(2)(5 \leqslant p \neq 2^m - 1)$ Can be Characterized by Its Order Component [J]. Kumamoto J Math，2005，18(1)：1-8.

[19] CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford：Clarendon Press，1985.

[20] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1987.
[21] GLAUBERMAN G. Central Elements in Core-Free Groups [J]. J Algebra，1966，4(3)：403-420.
[22] WALTER J H. The Characterization of Finite Groups with Abelian Sylow 2-Subgroups [J]. Annals of Mathematics(Second Series)，1969，89(3)：405-514.
[23] GORENSTEIN D，WALTER J H. The Characterization of Finite Groups with Dihedral Sylow 2-Subgroups I [J]. J Algebra，1965，2(1)：85-151.
[24] 陈　梦，陈贵云. 最高阶元的阶为 5 及 Sylow 2-子群的阶为 2，4，8 时的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：52-55.
[25] 陈　梦，刘正龙，陈贵云. 最高阶元的阶为 5 及 Sylow 2-子群的阶为 8 的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：21-25.
[26] IIYORI N，YAMAKI H. Prime Graph Components of the Simple Groups of Lie Type Over the Field of Even Charateristic [J]. J Algebra，1993，155(2)：335-343.
[27] KONDRATEV A S. On Prime Graph Components of Finite Simple Groups [J]. Math Sb，1989，180(6)：787-797.
[28] 陈贵云. Frobenius 群与 2-Frobenius 群的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485-487.

On Simplified Proof of Order Components Characterization of Lie Type Simple Groups $^2G_2(q)$

CHEN Yan-heng，　JIA Song-fang，　JIANG You-yi

School of Mathematics and Statistics，Chongqing Three Gorges University，Wanzhou Chongqing 404100，China

Abstract：Without using the simple group classification theorem，the finite simple groups have been classified，whose order of Sylow 2-subgroup are no more than 8. Based on this fact，the proof of order components characterization of Lie type simple groups $^2G_2(q)$ has been simplified.

Key words：finite simple group；Sylow 2-subgroup；order components characterization

责任编辑　廖　坤