第 44 卷 第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 6 月
Vol. 44 No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.06.005

高阶微分方程边值问题 3 个正解的存在性①

达佳丽，　王　婷，　张丽娟

西北师范大学 知行学院 数学系，兰州 730070

摘要： 主要讨论了一类高阶两点边值问题，首先利用已知的高阶两点边值问题的格林函数得到相关性质的结果，其次再利用 Leggett-Williams 不动点定理，详细研究以下高阶两点边值问题

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t)=a(t)f(u(t)) & t\in(0,1) \\ u^{(p)}(1)=0,\ u^{(i)}(0)=0 & i=0,1,\cdots,n-2 \end{cases}$$

3 个正解的存在性，其中 $n\geqslant 2$，$p\in\{1,2,\cdots,n-2\}$.

关　键　词： 高阶微分方程；Leggett-Williams 不动点定理；多解

中图分类号：O175.8　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)06-0018-04

文献[1]运用 Leggett-Williams 不动点定理研究了一类二阶边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+f(t,u)=0 & t\in(0,1) \\ u(0)=0,\ \alpha u(\eta)=u(1) \end{cases}$$

3 个正解的存在性. 受文献[1]的启发，并且基于一些基本性质的结果[2-6]，本文利用 Leggett-Williams 不动点定理，研究以下高阶边值问题：

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t)=a(t)f(u(t)) & t\in(0,1) \\ u^{(p)}(1)=0,\ u^{(i)}(0)=0 & i=0,1,\cdots,n-2 \end{cases}$$

3 个正解的存在性，其中 $n\geqslant 2$，$p\in\{1,2,\cdots,n-2\}$.

定义 1[7-8]　设 $E=(E,\ \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$P\subset E$ 非空，且满足：

(i) 对 $\forall\, u,v\in P$，$\alpha,\beta\geqslant 0$，有 $\alpha u+\beta v\in P$；

(ii) 如果 $-u,u\in P$，必有 $u=0$.

则称 P 是 E 中的锥.

定义 2[9]　设 E 为 Bananch 空间，$P\subset E$ 为 E 中的锥，如果映射 ϕ：$P\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 非负连续，且满足

$$\phi(tx+(1-t)y)\geqslant t\phi(x)+(1-t)\phi(y) \qquad x,y\in P,\ t\in[0,1]$$

则称 ϕ 为凹函数.

定义 3[10]　设 E 为 Bananch 空间，$P\subset E$ 为 E 中的锥，如果映射 φ：$P\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 非负连续，且满足

$$\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y) \qquad x,y\in P,\ t\in[0,1]$$

则称 φ 为凸函数.

定义 4[1]　令 $0<a<b$，α 是非负连续凹函数，定义凸子集 P_r 和 $P(\alpha,a,b)$：

$$P_r=\{x\in P:\ \|x\|<r\}$$

---

① 收稿日期：2018-08-29

基金项目：西北师范大学知行学院 2017 年校级科学研究项目(2017001KA)；甘肃省高等学校科研项目(2015B-203).

作者简介：达佳丽(1990-)，女，助教，主要从事常微分方程边值问题的研究.

$$P(\alpha, a, b) = \{x \in K: a \leqslant \alpha(x), \|x\| \leqslant b\}$$

引理 1[11] 令 $T: \overline{P_c} \longrightarrow \overline{P_c}$ 是全连续算子，且 α 是非负连续凹函数，对于 $x \in \overline{P_c}$，有 $\alpha(x) \leqslant \|x\|$. 假设存在 $0 < a < b < d \leqslant c$，使得：

(C_1) $\{x \in P(\alpha, b, d): \alpha(x) > b\} \neq \varnothing$，且对于 $x \in P(\alpha, b, d)$，有 $\alpha(Ax) > b$；

(C_2) 对于 $\|x\| < a$，有 $\|Ax\| < a$；

(C_3) 对于 $x \in P(\alpha, b, c)$，$\alpha(Ax) > b$，有 $\|Ax\| > d$.

则在 A 上至少有 3 个不动点 x_1, x_2, x_3，使得：

$$\|x_1\| < a \qquad b < \alpha(x_2) \qquad \|x_3\| > a \qquad \alpha(x_3) < b$$

引理 2[12] n 阶两点边值问题

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t) = a(t)f(u(t)) & t \in (0, 1) \\ u^{(p)}(1) = 0, \ u^{(i)}(0) = 0 & i = 0, 1, \cdots, n-2 \end{cases} \tag{1}$$

的解可以表示为

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

其中 $n \geqslant 2$，$p \in \{1, 2, \cdots, n-2\}$. Green 函数为

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}[t^{n-1}(1-s)^{n-p-1} - (t-s)^{n-1}] & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}(1-s)^{n-p-1} & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

引理 3[12] 任意给定 $s \in [0, 1]$，$G(\cdot, s): [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，则对于(2)式给出的 $G(t, s)$ 有如下性质：

$$0 \leqslant t^{n-1}G(1, s) \leqslant G(t, s) \leqslant G(1, s) \qquad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

引理 4 由于 f 是连续的，则边值问题(1)的解非负，且满足 $\min\limits_{t \in [\eta, 1]} u(t) \geqslant \gamma \|u\|$，其中 $\gamma = \eta^{n-1}$，$\eta \in [0, 1]$.

证 因为

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

所以

$$\|u\| \leqslant \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

又因为 $\dfrac{G(t, s)}{G(1, s)} \geqslant \eta^{n-1}$，则

$$\begin{aligned} u(t) = &\int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s = \\ &\int_0^1 \frac{G(t, s)}{G(1, s)}G(1, s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \\ &\eta^{n-1}\int_\alpha^\beta G(1, s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \eta^{n-1}\|u\| \end{aligned}$$

令 $\gamma = \eta^{n-1}$，所以

$$\min_{t \in [\eta, 1]} u(t) \geqslant \gamma \|u\|$$

记 $E = C[0, 1]$，规定它的范数为

$$\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$$

则 E 是 Banach 空间.

定义锥

$$P = \{u \in C[0, 1]: u(t) \geqslant 0, \min_{t \in [\eta, 1]} u(t) \geqslant \gamma \|u\|\}$$

记：

$$m = \min_{t \in [\eta,\ 1]} \int_{\eta}^{1} a(s) G(t,\ s) \mathrm{d}s$$

$$M = \max_{t \in [0,\ 1]} \int_{0}^{1} a(s) G(t,\ s) \mathrm{d}s$$

则 $0 < m < M$. 定义 α：$P \longrightarrow [0,\ \infty)$，$\alpha(u) = \min\limits_{t \in [\eta,\ 1]} u(t)$. 对于 $u \in K$，有 $\alpha(u) \leqslant \| u \|$.

定理 1 假设存在 a, b, c，使得 $0 < a < b \leqslant \min\left\{\gamma,\ \dfrac{m}{M}\right\} c$，且：

(H_1) $f(u) \leqslant \dfrac{c}{M}$，$u \in [0,\ c]$；

(H_2) $f(u) < \dfrac{a}{M}$，$u \in [0,\ a]$；

(H_3) $f(u) \geqslant \dfrac{b}{m}$，$u \in \left[b,\ \dfrac{b}{\gamma}\right]$.

则边值问题(1) 有 3 个正解 u_1, u_2, u_3，且：

$$\| u_1 \| < a \qquad \min_{t \in [\eta,\ 1]} u_2(t) > b \qquad \| u_3 \| > a \qquad \min_{t \in [\eta,\ 1]} u_3(t) < b$$

证 首先定义算子 T

$$Tu(t) = \int_{0}^{1} G(t,\ s) a(s) f(u(s)) \mathrm{d}s$$

如果 $u \in P$，根据 $G(t,\ s)$ 的性质，得 $Tu(t) \geqslant 0$. 根据引理 4，有 $Tu \in P$，也就是 T：$P \longrightarrow P$，则 T 是全连续算子.

现说明引理 1 的条件都满足. 对任意 $u \in P$，有 $\alpha(u) \leqslant \| u \|$. 如果 $u \in \overline{P_c}$，则 $\| u \| \leqslant c$，且(H_1)成立，则我们有

$$\begin{aligned} \| Tu(t) \| &= \max_{t \in [0,\ 1]} | Tu(t) | = \\ & \max_{t \in [0,\ 1]} \left| \int_{0}^{1} G(t,\ s) a(s) f(u(s)) \mathrm{d}s \right| \leqslant \\ & \frac{c}{M} \max_{t \in [0,\ 1]} \left| \int_{0}^{1} G(t,\ s) a(s) \mathrm{d}s \right| = c \end{aligned}$$

因此，T：$\overline{P_c} \longrightarrow \overline{P_c}$. 同理，如果 $u \in \overline{P_a}$，且(H_2)成立，则 T：$\overline{P_a} \longrightarrow \overline{P_a}$. 因此，引理 1 的条件$(\mathrm{C}_2)$满足.

选取 $u(t) = \dfrac{b}{\gamma}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，有：

$$u(t) = \frac{b}{\gamma} \in P\left(\alpha,\ b,\ \frac{b}{\gamma}\right) \qquad \alpha(u) = \alpha\left(\frac{b}{\gamma}\right) > b$$

所以

$$\left\{u \in P\left(\alpha,\ b,\ \frac{b}{\gamma}\right):\ \alpha(u) > b\right\} \neq \varnothing$$

如果 $u \in P\left(\alpha,\ b,\ \dfrac{b}{\gamma}\right)$，则 $b \leqslant u(s) \leqslant \dfrac{b}{\gamma}$，对于 $s \in [\eta,\ 1]$，由(H_3)知

$$\begin{aligned} \alpha(Tu(t)) &= \min_{t \in [\eta,\ 1]} \int_{0}^{1} G(t,\ s) a(s) f(u(s)) \mathrm{d}s \geqslant \\ & \min_{t \in [\eta,\ 1]} \int_{\eta}^{1} G(t,\ s) a(s) f(u(s)) \mathrm{d}s \geqslant \\ & \frac{b}{m} \min_{t \in [\eta,\ 1]} \int_{\eta}^{1} G(t,\ s) a(s) \mathrm{d}s = b \end{aligned}$$

因此引理 1 的条件(C_1)满足.

如果 $u \in P(\alpha,\ b,\ c)$，且 $\| Tu \| > \dfrac{b}{\gamma}$，则

$$\alpha(Tu(t))=\min_{t\in[\eta,1]}Tu(t)\geqslant\gamma\|Tu\|>b$$

因此，条件(C_3)满足. 根据引理 1 得，存在正解 u_1,u_2,u_3，使得：

$$\|u_1\|<a \qquad \min_{t\in[\eta,1]}u_2(t)>b \qquad \|u_3\|>a \qquad \min_{t\in[\eta,1]}u_3(t)<b$$

参考文献：

[1] HE X M, GE W G. Triple Solutions for Second-Order Three-Point Boundary Value Problems [J]. J Math Anal Appl, 2002, 268(1): 256-265.

[2] 徐登洲，马如云. 线性微分方程的非线性扰动 [M]. 2 版. 北京：科学出版社，2008.

[3] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题 [M]. 北京：科学出版社，2004.

[4] 黄　链，邓　磊. C^*-代数值 b-度量空间中不动点的存在性与唯一性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(2)：55-59.

[5] 唐榆婷，唐春雷. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：81-86.

[6] 贾秀玲，段　誉. 一类带线性项非局部问题解的存在性与非存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(10)：22-25.

[7] LEGGETT R W, WILLIANS L R. Multiple Positive Fixed Solutions of Nonlinear Operarors on Ordered Banach Spaces [J]. Indiana Univ Math J, 1979, 28: 673-677.

[8] AVERY R I, HENDERSON J. Three Symmetric Positive Solutons for a Second Order Boundary Value Problem [J]. Appl Math Lett, 2000, 13: 1-7.

[9] AVERY R I, PETERSON A C. Three Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces [J]. Comput Math Appl, 2001, 42: 313-322.

[10] ANDERSON D, AVERY R I. Multiple Positive Solutions to a Third-Order Discrete Focal Boundary Value Problem [J]. Comput Math Appl, 2001, 41(3-5): 333-340.

[11] DONG S J, GE W G, Positive Solutions of an m-Point Boundary Value Problem with Sign Changing Nonlinearities [J]. Comput Math Appl, 2005, 49(4): 589-598.

[12] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题 [M]. 北京：科学出版社，2007.

On Existence of Multiple Solutions for Boundary Value Problem of Higher Differential Equation

DA Jia-li,　WANG　Ting,　ZHANG Li-juan

Department of Mathematics, Zhixing College, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: A class of high order two-point boundary value problems has been discussed. Firstly using the green's function of the higher order two-point boundary value problem, the related properties have been obtained. Using the Leggett-Williams Fixed-Point Theorem, the existence of multiple solutions of following high order boundary value problem has been studied

$$\begin{cases}-u^{(n)}(t)=a(t)f(u(t)) & t\in(0,1)\\ u^{(p)}(1)=0,\ u^{(i)}(0)=0 & i=0,1,\cdots,n-2\end{cases}$$

where $n\geqslant 2$, $p\in\{1, 2, \cdots, n-2\}$.

Key words: higher differential equation; Leggett-Williams Fixed-Point Theorem; multiple solution

责任编辑　廖　坤