第 44 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 6 月
Vol. 44　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.06.006

一类临界 Schrödinger 方程的正基态径向解①

杜　瑶，　唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了径向空间中带有 Sobolev 临界指数的 Schrödinger 方程，不要求方程临界项带有的位势满足周期或渐近周期的相关条件．主要利用 Nehari 流形和 Ekeland 变分原理找到相应流形上的极小化序列，进而证明基态径向解的存在性．最后运用强极大值原理证明方程的解是正解，从而得到方程的正基态径向解．

关　键　词： Schrödinger 方程；Sobolev 临界指数；Ekeland 变分原理；正基态径向解

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)06-0022-05

我们主要考虑如下形式的 Schrödinger 方程：

$$-\Delta u+u=\lambda|u|^{p-2}u+Q(|x|)|u|^{2^*-2}u \qquad x\in\mathbb{R}^N \tag{1}$$

其中 $N\geqslant 4$，$2<p<2^*=\dfrac{2N}{N-2}$，λ 为正的实数，并且 Q 满足如下条件：

(Q) $Q\in C(\mathbb{R}^N)$，对任意的 $x\in\mathbb{R}^N$，有

$$0<Q(|x|)\leqslant Q(|x_0|)=\max_{x\in\mathbb{R}^N}Q(|x|)$$

并且当 $x\to x_0$ 时，有

$$Q(|x|)-Q(|x_0|)=O(|x-x_0|^2)$$

近年来，很多学者研究了带有 Sobolev 临界指数的 Schrödinger 方程，在许多文献中均假设 Q 是周期的或者渐近周期的．比如：文献[1-2]研究了 Q 是周期的情况，并得到了方程(1)非平凡解的存在性；文献[3-5]指出若 Q 是渐近周期的，则方程(1)有基态解；文献[6-9]研究了 $Q=1$ 的情况．对于带有临界项的 Schrödinger 方程的研究，之前均要求 Q 是周期的或者渐近周期的，本文去掉了 Q 是周期的或者渐近周期的这个条件．更多相关研究可参考文献[10-12]．本文的主要结果为：

定理 1　假设 $N\geqslant 4$，$2<p<2^*$，条件(Q)成立．那么对任意的 $\lambda>0$，方程(1)存在正基态径向解．

注 1　在某种意义上，由于文献[6]未考虑 $Q\neq 1$ 的情况，因此我们完善了文献[6]的结果．我们需指出：满足条件(Q)且不是周期的或者渐近周期的函数是存在的，如 $Q(|x|)=\mathrm{e}^{-|x|^2}+\cos(|x|^2)+2$．

方程(1)对应的能量泛函为 I：$H_r^1(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}Q(|x|)|u|^{2^*}\mathrm{d}x \qquad u\in H_r^1(\mathbb{R}^N)$$

其中 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 是 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中全体径向函数构成的子空间．

易知 $I(u)\in C^1(H_r^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$，并且对任意的 $v\in H_r^1(\mathbb{R}^N)$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla v+uv)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}Q(|x|)|u|^{2^*-2}uv\mathrm{d}x$$

---

①　收稿日期：2018-12-04

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267)；重庆研究生科研创新项目(CYS17084)．

作者简介：杜　瑶(1993-)，女，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究．

通信作者：唐春雷，教授，博士研究生导师．

定义空间 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 的范数为

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义如下形式的 Nehari 流形：

$$\mathcal{N} = \{u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'(u), u\rangle = 0\}$$

与文献[13]中引理 4.1 以及文献[9]中引理 3.1 的证明类似，可以得到 I 限制在 $\mathcal{N}$ 上的一些性质.

引理 1　假设条件(Q)成立，则下面结论成立：

(i) 对任意的 $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$，存在唯一的 $t_u = t(u) > 0$，使得 $t_u u \in \mathcal{N}$，且 $I(t_u u) = \max\limits_{t\geqslant 0} I(tu)$；

(ii) 流形 $\mathcal{N}$ 是正则的；

(ii) 若定义 $m = \inf\limits_{u\in\mathcal{N}} I(u)$，则 $m > 0$.

引理 2　假设条件(Q)成立，序列$\{u_n\} \subset H_r^1(\mathbb{R}^N)$使得：

$$I'(u_n) \to 0 \qquad I(u_n) \to c \in \left(0, \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} (Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}\right)$$

则序列$\{u_n\}$有收敛子列.

证　证明的思路与文献[13]中引理 1.44 类似. 因为 $I'(u_n) \to 0$，且对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 有 $Q(|x|) > 0$，结合 $2 < p < 2^*$，可知

$$\begin{aligned} c + o(1)\|u_n\| \geqslant & I(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 - \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u_n|^{2^*}\mathrm{d}x \geqslant \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

因此，序列$\{u_n\}$在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 中是有界的. 必要时，可取$\{u_n\}$的一个子列(不妨仍记为$\{u_n\}$)，则存在 $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$，使得

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & x \in H_r^1(\mathbb{R}^N) \\ u_n \to u & x \in L^t(\mathbb{R}^N),\ 2 < t < 2^* \\ u_n(x) \to u(x) & \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

因为序列$\{u_n\}$是有界的且满足 $I'(u_n) \to 0$，则$\langle I'(u_n), u_n\rangle \to 0$. 又因为在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n \rightharpoonup u$，易证$\langle I'(u), u\rangle = 0$. 结合 $2 < p < 2^*$ 和 $Q(|x|) > 0$，有

$$\begin{aligned} I(u) = & I(u) - \frac{1}{p}\langle I'(u), u\rangle = \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2 - \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^{2^*}\mathrm{d}x \geqslant 0 \end{aligned}$$

令 $v_n = u_n - u$. 由于在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n \rightharpoonup u$，则

$$\|u\|^2 + \|v_n\|^2 = \|u_n\|^2 + o(1) \tag{2}$$

因为在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n \to u$，则

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \mathrm{d}x + o(1) \tag{3}$$

运用 Brézis-Lieb 引理，可推断

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^{2^*}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{2^*}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u_n|^{2^*}\mathrm{d}x + o(1) \tag{4}$$

由 $\frac{1}{2} \times (2) - \frac{1}{p} \times (3) - \frac{1}{2^*} \times (4)$ 和 $I(u_n) \to c$，可知当 $n \to \infty$ 时，有

$$I(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{2^*}\mathrm{d}x \to c \tag{5}$$

此外，由(2)－(4)式和$\langle I'(u_n), u_n\rangle \to 0$，可得

$$
\begin{aligned}
o(1) &= \langle I'(u_n),\ u_n\rangle = \\
&\| u_n \|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u_n|^{2^*}\mathrm{d}x = \\
&\| u \|^2 + \| v_n \|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|u|^{2^*}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{2^*}\mathrm{d}x + o(1) = \\
&\langle I'(u),\ u\rangle + \| v_n \|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{2^*}\mathrm{d}x + o(1)
\end{aligned}
$$

则

$$
\| v_n \|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{2^*}\mathrm{d}x \to 0
$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，存在非负常数 b，使得：

$$
\| v_n \|^2 \to b \qquad \int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{2^*}\mathrm{d}x \to b \tag{6}
$$

若 $b=0$，我们可得 $\| v_n \| \to 0$，则结论成立. 然而，若 $b>0$，由于 $Q(x_0)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}^N} Q(|x|)>0$，并运用 Sobolev 嵌入定理，可以推断

$$
(Q(x_0))^{\frac{2}{2^*}}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\mathrm{d}x \geqslant S(Q(x_0))^{\frac{2}{2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \geqslant S\left(\int_{\mathbb{R}^N} Q(|x|)|v_n|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}} \tag{7}
$$

结合(6)式，可得$(Q(x_0))^{\frac{2}{2^*}}b \geqslant Sb^{\frac{2}{2^*}}$. 从而 $b\geqslant S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}$. 将(6)式代入(5)式，由 $I(u)\geqslant 0$ 可知 $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)b\leqslant c$. 因此

$$
\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}} \leqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)b \leqslant c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}
$$

矛盾，则 $b>0$ 不成立，故结论成立.

众所周知，方程 $-\Delta u=|u|^{2^*-2}u$ 有一个径向的基态解

$$
U(x)=\frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}
$$

定义径向函数 $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$，使得：当 $x\in B(x_0,\rho)$ 时，$\psi(x)\equiv 1$；当 $x\in\mathbb{R}^N\backslash B(x_0,2\rho)$ 时，$\psi(x)\equiv 0$. 令 $u_\varepsilon(x)=\psi(x)U_\varepsilon(x)$，其中 $\varepsilon>0$，且：

$$
U_\varepsilon(x)=\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}U\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) \qquad \| \nabla U_\varepsilon \|_2^2 = \| U_\varepsilon \|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}}
$$

根据文献[14]，可得如下估计：

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x = S^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}) \tag{8}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x = S^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N}) \tag{9}
$$

以及

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x = \begin{cases} O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|) & N=4 \\ O(\varepsilon^2) & N\geqslant 5 \end{cases} \tag{10}
$$

引理 3 若定理 1 的条件都满足，则

$$
c_1=\inf_{u\in H_r^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}}\max_{t\geqslant 0} I(tu) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}
$$

证 对任意的 $u\in H_r^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$，不难验证 $c_1\leqslant\max\limits_{t\geqslant 0} I(tu)$. 因此只需证存在 $u_0\in H_r^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$，使得$\max\limits_{t\geqslant 0} I(tu_0)<\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}$即可. 利用文献[14]中的方法，当 $N\geqslant 4$ 且 $p>2$ 时，有

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x \geqslant C\varepsilon^{\frac{(2-N)p}{2}+N} + O(\varepsilon^{\frac{(N-2)p}{2}}) \tag{11}
$$

根据文献[4]，可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}(Q(x_0)-Q(|x|))|u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x=O(\varepsilon^2)\qquad N\geqslant 4 \tag{12}$$

由引理 1 可知，存在 $t_\varepsilon>0$，使得 $\max\limits_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon)=I(t_\varepsilon u_\varepsilon)$. 利用文献[14]中引理 3.6 的证明思路，可证得：对于充分小的 ε，有 $t_\varepsilon\leqslant C$. 定义：

$$\alpha=\frac{(2-N)p}{2}+N\qquad \beta=\frac{(N-2)p}{2}$$

当 $N\geqslant 4$ 时，根据(8)－(12)式，可得

$$\begin{aligned}\max_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon)=&\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\varepsilon|^2+|u_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x-\frac{\lambda t_\varepsilon^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x-\frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}Q(|x|)|u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x\leqslant\\&\max_{t\geqslant 0}\left(\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x_0)|u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x\right)+\\&\frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(Q(x_0)-Q(|x|))|u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x+\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda t_\varepsilon^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})+O(\varepsilon^2)-C\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^\beta)+\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\max_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}+O(\varepsilon^2)+O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)-C\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^\beta) & N=4\\ \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})+O(\varepsilon^2)-C\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^\beta) & N\geqslant 5\end{cases}$$

此外，因为 $N\geqslant 4$ 且 $2<p<2^*$，通过计算可得 $0<\alpha<2$ 以及 $2\leqslant N-2<\beta<N$，故

$$\max_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon)<\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}(Q(x_0))^{\frac{2-N}{2}}$$

定理 1 的证明　类似文献[13]中引理 4.1 和定理 4.2 的证明，可得

$$m=\inf_{u\in\mathcal{N}} I(u)=\inf_{u\in H_r^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\max_{t\geqslant 0} I(tu)$$

由引理 1，利用 Ekeland 变分原理，可知存在序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}$，使得当 $n\to\infty$ 时，有：

$$I(u_n)\to m\qquad \|(I|_{\mathcal{N}})'(u_n)\|\to 0$$

与文献[9]中引理 4.1 的证明类似，可证得 $I'(u_n)\to 0$. 由引理 2 和引理 3，可知在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n\to u$，$I(u)=m$ 且 $I'(u)=0$. 容易验证 $|u|\in\mathcal{N}$ 以及 $I(|u|)=I(u)=m$. 运用拉格朗日乘子定理知，$|u|$ 是方程(1)的非负基态解. 由强极大值原理可得 $u>0$.

参考文献：

[1] CHABROWSKI J, SZULKIN A. On a Semilinear Schrödinger Equation with Critical Sobolev Exponent [J]. Proc Amer Math Soc, 2002, 130(1): 85-93.

[2] SCHECHTER M, ZOU W M. Weak Linking Theorems and Schrödinger Equations with Critical Sobolev Exponent [J]. ESAIM Control Optim Calc Var, 2003, 9: 601-619.

[3] ZHANG H, XU J X, ZHANG F B. On a Class of Semilinear Schrödinger Equations with Indefinite Linear Part [J]. J Math Anal Appl, 2014, 414(2): 710-724.

[4] LIU J, LIAO J F, TANG C L. A Positive Ground State Solution for a Class of Asymptotically Periodic Schrödinger Equations with Critical Exponent [J]. Comput Math Appl, 2016, 72(7): 1851-1864.

[5] ALVES C O, GERMANO G F. Ground State Solution for a Class of Indefinite Variational Problems with Critical Growth [J]. J Differential Equations, 2018, 265(1): 444-477.

[6] MIYAGAKI O H. On a Class of Semilinear Elliptic Problems in $\mathbb{R}^N$ with Critical Growth [J]. Nonlinear Anal, 1997, 29(7): 773-781.

[7] ALVES C O, CARRIÃO P C, MIYAGAKI O H. Nonlinear Perturbations of a Periodic Elliptic Problem with Critical

Growth [J]. J Math Anal Appl, 2001, 260(1): 133-146.

[8] ALVES C O, SOUTO M A S, MONTENEGRO M. Existence of a Ground State Solution for a Nonlinear Scalar Field Equation with Critical Growth [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2012, 43(3-4): 537-554.

[9] CERAMI G, VAIRA G. Positive Solutions for Some Non-Autonomous Schrödinger-Poisson Systems [J]. J Differential Equations, 2010, 248(3): 521-543.

[10] 陈尚杰. 一类非齐次 Schrödinger 方程非平凡解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 55-59.

[11] 李贵东, 唐春雷. 带有临界指数的 Schrödinger 方程正基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 92-96.

[12] 李苗苗, 唐春雷. 一类带临界指数的 Schrödinger-Poisson 方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 35-38.

[13] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

[14] BRÉZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(4): 437-477.

Positive Ground State Radial Solutions for a Class of Critical Schrödinger Equation

DU Yao, TANG Chun-Lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a Schrödinger equation with critical Sobolev exponent in the radial space has been studied, and the potential of critical term is not periodic or asymptotic periodic. Nehari manifold and Ekeland's variational principle have been applied to find a sequence of minimizing sequence, moreover, the existence of ground state solutions has been proved. Finally, strong maximum principle implies the solution is positive. Therefore, the existence of a positive ground state radial solution is established.

Key words: Schrödinger equation; Sobolev critical exponent; Ekeland's variational principle; positive ground state radial solutions

责任编辑 廖 坤