DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.06.007

$\mathbb{R}^3$ 中一类带临界指数的 Kirchhoff 型问题的注记①

伍君芬[1], 李红英[2]

1. 重庆邮电大学 移通学院 数理教学部,重庆 合川 401520;
2. 西华师范大学 数学与信息学院,四川 南充 637009

摘要:研究如下一类带临界指数的 Kirchhoff 型问题:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u = u^5+\lambda k(x)u^{q-1} & x\in\mathbb{R}^3 \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

其中 $a,b,\lambda>0$, $2<q<6$, $k\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbb{R}^3)$ 为非零非负函数. 利用变分方法,获得了一个正山路解. 进一步,证明了正基态解的存在性. 补充并完善了近期相关文献的结果.

关 键 词:临界指数;Kirchhoff 型问题;变分法;正解

中图分类号:**O176.3** **文献标志码**:**A** **文章编号**:1000-5471(2019)06-0027-04

考虑如下带临界指数的 Kirchhoff 型问题:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u = u^5+\lambda k(x)u^{q-1} & x\in\mathbb{R}^3 \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a,b,\lambda>0$, $1\leqslant q<6$, $k\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbb{R}^3)$ 为非零非负函数. 6 为 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 嵌入 $L^s(\mathbb{R}^3)(s\in[1,6])$ 的 Sobolev 临界指数. $\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 为空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 的标准范数,$L^s(\mathbb{R}^3)$ 空间的标准函数为

$$|u|_s=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}$$

当 $q=1$ 时,文献[1]研究了问题(1)当 $\lambda>0$ 充分小时两个正解的存在性. 当 $1<q<2$ 时,文献[2]利用变分方法获得了问题(1)两个正解的存在性. 文献[3]研究了 $q=2$ 的情况. 特别地,当 $2<q<6$ 时,文献[4]研究了问题(1),其中 $k\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbb{R}^3)$ 为非零非负函数并满足如下条件:

(K) 存在 $x_0\in\mathbb{R}^3$, $\delta,\rho>0$,使得对任意 $|x-x_0|<\rho$ 和 $0<\beta<3$,有 $k(x)\geqslant\delta|x-x_0|^{-\beta}$. 利用变分法,得到:当 $2<q<4$, $3-\dfrac{2q}{3}<\beta<3$ 时,存在 $\lambda_*>0$,使得对 $\forall\,0<\lambda<\lambda_*$,问题(1)都至少存在一个正的基态解;当 $4\leqslant q<6$, $0<\beta<3$ 时,对 $\forall\,\lambda>0$,问题(1)都至少存在一个正的基态解. 文献[5-7]也研究了带临界指数的 Kirchhoff 型问题.

值得思考的是:当 $2<q<6$ 时,在去掉条件(K)的情况下,问题(1)是否存在正解? 本文将给出一个

---

① 收稿日期:2018-07-15

基金项目:重庆邮电大学移通学院高等教育教学改革研究项目(YTJG201722);四川省教育厅自然科学重点资助科研项目(18ZA0471);西华师范大学基本科研项目(18D052);西华师范大学创新团队项目(CXTD2018-8).

作者简介:伍君芬(1976-),女,讲师,主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者:李红英,讲师.

肯定的答案.

定义问题(1)对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^3}k(x)|u|^q\mathrm{d}x \qquad \forall u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$$

显然,$I\in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^3),\mathbb{R})$,且对 $\forall u,v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$,有

$$\langle I'(u),v\rangle=(a+b\|u\|^2)\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u,\nabla v)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|u|^4uv\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}k(x)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}x$$

众所周知,问题(1)的解与能量泛函 I 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上的临界点是一一对应的. 记 S 为 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ 的最佳 Sobolev 常数,即

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{2}$$

根据文献[4]中的引理2.2,可以获得能量泛函 I 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上具有如下山路结构:

命题 1 假设 $a,b>0$,$2<q<6$,$\lambda>0$,则 I 满足以下条件:

(i) 存在两个正常数 $r,\rho>0$,使得 $I|_{S_r}\geqslant\rho$,其中 $S_r=\{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3):\|u\|=r\}$;

(ii) 存在 $u_0\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 且 $\|u_0\|>r$,使得 $I(u_0)<0$.

记

$$\Lambda=\frac{abS^3}{4}+\frac{b^3S^6}{24}+\frac{(b^2S^4+4aS)^{\frac{3}{2}}}{24}$$

根据文献[4]中引理2.4和引理2.5,可得如下局部$(\mathrm{PS})_c$ 条件:

命题 2 假设 $a,b>0$,$\lambda>0$,则:

(i) 当 $2<q<4$ 时,泛函 I 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上满足局部$(\mathrm{PS})_c$ 条件,其中 $c<\Lambda-D\lambda^{\frac{6}{6-q}}$,$D$ 为与 λ 无关的正常数;

(ii) 当 $4\leqslant q<6$ 时,泛函 I 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上满足局部$(\mathrm{PS})_c$ 条件,其中 $c<\Lambda$.

接下来,我们估算泛函 I 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上的山路水平值. 众所周知,对 $\forall x\in\mathbb{R}^3$,$U(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}$ 为如下带临界指数项的半线性椭圆方程的所有正解:

$$-\Delta u=u^5 \qquad x\in\mathbb{R}^3$$

根据文献[2],可得

$$\|U\|^2=|U|_6^6=S^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

我们可得如下结论:

引理 1 假设 $a,b>0$,$\lambda>0$,则:

(i) 当 $2<q<4$ 时,存在 $\lambda_*>0$,使得对 $\forall 0<\lambda<\lambda_*$,有 $\sup\limits_{t\geqslant 0}I(tU)<\Lambda-D\lambda^{\frac{6-q}{6}}$;

(ii) 当 $4\leqslant q<6$ 时,有 $\sup\limits_{t\geqslant 0}I(tU)<\Lambda$.

证 对 $\forall t\geqslant 0$,有

$$I(tU)=\frac{at^2}{2}\|U\|^2+\frac{bt^4}{4}\|U\|^4-\frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|U|^6\mathrm{d}x-\frac{\lambda t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3}k(x)|U|^q\mathrm{d}x$$

显然有 $I(0)=0$,且 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(tU)=-\infty$. 根据文献[4]中的引理2.6可得,存在 $t_*>0$ 满足

$$0<t_0<t_*<T_0<\infty$$

使得

$$\sup_{t\geqslant 0}I(tU)=I(t_*U)$$

其中 $t_0,T_0>0$ 为常数. 令

$$g(t)=\frac{at^2}{2}\|U\|^2+\frac{bt^4}{4}\|U\|^4-\frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|U|^6\mathrm{d}x$$

从而有

$$g'(t) = -t(t^4 \mid U \mid_6^6 - bt^2 \| U \|^4 - a \| U \|^2)$$

令 $g'(t)=0$，可得

$$t_{\max} = \left(\frac{b\| U \|^4 + \sqrt{b^2 \| U \|^8 + 4a \| U \|^2 \mid U \mid_6^6}}{2 \mid U \mid_6^6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $0<t<t_{\max}$ 时，有 $g'(t)>0$；当 $t>t_{\max}$ 时，有 $g'(t)<0$. 容易得到 $\sup\limits_{t\geqslant 0} g(t) = g(t_{\max})$，且根据(3)式，我们有

$$\begin{aligned} g(t_{\max}) = & \frac{t_{\max}^2}{2}\left(a \| U \|^2 + \frac{bt_{\max}{}^2}{2} \| U \|^4 - \frac{t_{\max}^4}{\mid U \mid_6^6}\right) = \\ & \frac{ab \| U \|^6}{4 \mid U \mid_6^6} + \frac{b^3 \| U \|^{12}}{24 \mid U \mid_6^{12}} + \frac{(b^2 \| U \|^8 + 4a \| U \|^2 \mid U \mid_6^6)^{\frac{3}{2}}}{24 \mid U \mid_6^{12}} = \\ & \frac{abS^{\frac{9}{2}}}{4S^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^3S^9}{24S^3} + \frac{(b^2S^6 + 4aS^3)^{\frac{3}{2}}}{24S^3} = \\ & \frac{abS^3}{4} + \frac{b^3S^6}{24} + \frac{(b^2S^4 + 4aS)^{\frac{3}{2}}}{24} = \Lambda \end{aligned} \tag{4}$$

而对于 $\frac{\lambda t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3} k(x) \mid U \mid^q \mathrm{d}x$，利用 Hölder 不等式以及(2)式和(3)式，可得

$$0 \leqslant \frac{\lambda t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3} k(x) \mid U \mid^q \mathrm{d}x \leqslant \frac{\lambda t^q}{q} \mid k \mid_{\frac{6}{6-q}} \mid U \mid_6^q = \frac{\lambda t^q}{q} \mid k \mid_{\frac{6}{6-q}} S^{\frac{q}{4}} \tag{5}$$

因此，根据(4)式，可得

$$\begin{aligned} \sup_{t\geqslant 0} I(tU) = I(t_* U) = g(t_*) - \frac{\lambda t_*^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3} k(x) \mid U \mid^q \mathrm{d}x \leqslant \\ g(t_{\max}) - \frac{\lambda t_0^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3} k(x) \mid U \mid^q \mathrm{d}x = \Lambda - \frac{\lambda t_0^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3} k(x) \mid U \mid^q \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6}$$

当 $2<q<4$ 时，对正常数 D，存在 $\lambda_*>0$，使得对 $\forall\, 0<\lambda<\lambda_*$，有

$$\frac{\lambda t_0^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3} k(x) \mid U \mid^q \mathrm{d}x > D\lambda^{\frac{6}{6-q}}$$

结合(6)式可得，对 $\forall\, 0<\lambda<\lambda_*$，有 $\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tU) < \Lambda - D\lambda^{\frac{6-q}{6}}$. 当 $4\leqslant q<6$ 时，根据(5)式和(6)式，可得对 $\forall\lambda>0$ 有 $\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tU) < \Lambda$.

下面给出本文的主要结论及其证明：

定理 1　假设 $a,b>0$，$2<q<6$，系数函数 $k\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbb{R}^3)$ 为非零非负函数，则有：

(i) 当 $2<q<4$ 时，存在 $\lambda_*>0$，使得对 $\forall\, 0<\lambda<\lambda_*$，问题(1)至少有一个正能量的正山路解；

(ii) 当 $4\leqslant q<6$ 时，对 $\forall\lambda>0$，问题(1)至少有一个正能量的正山路解；

(iii) 在问题(1)具有正山路解的情况下，问题(1)必定存在一个正基态解.

证　根据命题 1 可知，泛函 I 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上具有山路几何结构. 从而，存在序列 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，使得当 $n\to\infty$ 时，有：

$$I(u_n)\to c \qquad I'(u_n)\to 0$$

其中：

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) > \rho$$

$$\Gamma = \{\gamma\in C([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^3)) : \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=u_0\}$$

这里 ρ, u_0 为命题 1 中所定义. 由于 $I(u)=I(\mid u \mid)$，不妨假设 $u_n\geqslant 0$. 应用山路引理，根据命题 2 以及引理 1 可知，当 $2<q<4$ 时，有 $c<\Lambda - D\lambda^{\frac{6}{6-q}}$，且 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上存在一收敛子列(仍记为 $\{u_n\}$). 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中，设 $u_n\to u_*$ 且 $u_*\geqslant 0$，从而有 $I(u_*) = \lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = c>\rho>0$，且 u_* 为问题(1)的非负解. 再根据强极大值原理，可得 u_* 为问题(1)正能量的正山路解. 当 $4\leqslant q<6$ 时，类似地，可证得问题(1)至

少有一个正能量的正山路解. 最后，根据文献[4]中定理1.1和定理1.2的证明，同样可得问题(1)必定存在一个正基态解.

参考文献：

[1] LIU J，LIAO J F，TANG C L. Positive Solutions for Kirchhoff-Type Equations with Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$[J]. J Math Anal Appl，2015，429(2)：1153-1172.

[2] 刘选状，吴行平. 两类带有临界指数的Kirchhoff型方程的解的存在性和多重性[D]. 重庆：西南大学，2015.

[3] ZHONG X J，TANG C L. Multiple Positive Solutions to a Kirchhoff Type Problem Involving a Critical Nonlinearity in $\mathbb{R}^3$[J]. Adv Nonlinear Stud，2017，17(4)：661-676.

[4] LEI C Y，SUO H M，CHU C M，et al. On Ground State Solutions for a Kirchhoff Type Equation with Critical Growth[J]. Comput Math Appl，2016，72(3)：729-740.

[5] LI H Y，LIAO J F. Existence and Multiplicity of Solutions for a Superlinear Kirchhoff-Type Equations with Critical Sobolev Exponent in $\mathbb{R}^N$[J]. Comput Math Appl，2016，72(12)：2900-2907.

[6] 唐榆婷，唐春雷. 一类带Hardy-Sobolev临界指数的Kirchhoff方程正解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：81-86.

[7] 朱同亮，吴行平. 两类带有临界指数的Kirchhoff型方程的解的存在性和多重性[D]. 重庆：西南大学，2016.

Remark on a Class of Kirchhoff-Type Problem with Critical Exponent in $\mathbb{R}^3$

WU Jun-fen[1]， LI Hong-ying[2]

1. Department of Scientific Education，Collage of Mobile Telecommunications，Chongqing University of Posts and Telecom，Hechuan Chongqing 401520，China；

2. School of Mathematics and Information，China West Normal University，Nanchong Sichuan 637009，China

Abstract：In this paper，the following Kirchhoff-type problem with critical exponent is considered：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = u^5 + \lambda k(x) u^{q-1} & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

where $a, b, \lambda > 0$，$2 < q < 6$，$k \in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbb{R}^3)$ is nonzero and nonnegative. By using the variational method，a positive Moutian-Pass solution is obtained and the existence of positive ground state solution is proved，which complete and improve some results of the recent reference.

Key words：critical exponent；Kirchhoff-type problem；variational method；positive solutions

责任编辑 廖 坤