第 44 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 6 月
Vol. 44　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xsxb.2019.06.009

$L\omega$ -空间 $\omega\beta$ -连通性的樊畿定理[①]

陈　波

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 讨论了 $L\omega$ -空间 $\omega\beta$ -连通性的刻画问题. 利用 $\omega\beta$ -远域的概念, 给出了 $L\omega$ -空间中 $\omega\beta$ -连通性的樊畿定理, 建立了 $\omega\beta$ -连通的几何直观性的刻画. 应用樊畿定理, 讨论了 $\omega\beta$ -连通性的一个基本性质.

关　键　词: $L\omega$ -空间; 樊畿定理; $\omega\beta$ -连通; $\omega\beta$ -远域

中图分类号: O189.13　　**文献标志码: A**　　**文章编号:** 1000-5471(2019)06-0037-03

连通性是 L -拓扑空间中的重要性质, 基于不同的隔离集合, 在 L -拓扑空间中有不同的连通性[1-3].

在模糊拓扑的发展中, 算子方法起着重要作用. 学者们在 L -拓扑空间中建立了多种算子, 如闭包算子[4-5]、δ -闭包算子[6-7]、N -闭包算子[8]、SR -闭包算子[9] 等. 这些算子的一个共同性质是具有保序性, 基于此特点, 文献[10]提出了一种统一的保序 ω -算子的概念并建立了 $L\omega$ -拓扑空间, 进一步推广了 L -拓扑空间. 文献[11-13]在 $L\omega$ -空间中讨论了多种拓扑性质, 丰富了 $L\omega$ -空间理论. 借助于 L -拓扑空间中 β -开集[14-15] 等概念, 文献[16]在 $L\omega$ -空间中建立了 $\omega\beta$ -连通的概念.

在一般拓扑学[17] 中, 樊畿定理是刻画连通性的重要工具. 本文的目的是在文献[16]的基础上, 将樊畿定理进一步推广到 $L\omega$ -空间中, 丰富 $\omega\beta$ -连通的拓扑理论. 本文借助于 $\omega\beta$ -远域的概念, 建立了 $\omega\beta$ -连通性的樊畿定理, 从正面给出了 $\omega\beta$ -连通的几何直观性的刻画, 应用樊畿定理, 简化了文献[16]中 $\omega\beta$ -连通一个拓扑性质的证明.

在本文中, L 为 Fuzzy 格, M 和 M_i 分别表示 L 和 $L_i(i=1,2)$ 中所有分子(即非零并既约元)所成之集合. L^X 表示定义在非空集合 X 上, 取值于 L 的所有 L-Fuzzy 集合构成的集族, $\underline{1}$ 和 $\underline{0}$ 分别表示 L^X 中最大元和最小元, $M^*(L^X)$ 表示 L^X 中所有分子所成的集合. 其它相关概念可参考文献[4-5].

定义 1　设 (L^X, Ω) 为 $L\omega$ -空间, $A\in L^X$,

(a) 如果 $A\leqslant \omega\,\mathrm{cl}(\omega\mathrm{int}(\omega\mathrm{cl}(A)))$, 称 A 为 $\omega\beta$ -开集;

(b) 如果 $A\geqslant \omega\,\mathrm{int}(\omega\mathrm{cl}(\omega\mathrm{int}(A)))$, 称 A 为 $\omega\beta$ -闭集.

以 $\omega\beta O(L^X)$ 和 $\omega\beta C(L^X)$ 分别表示 $\omega\beta$ -开集和 $\omega\beta$ -闭集的全体. 显然, $A\in\omega\beta O(L^X)$ 当且仅当 $A'\in\omega\beta C(L^X)$.

定义 2　设 (L^X, Ω) 为 $L\omega$ -空间, $A, B\in L^X$. 记 $\omega\beta\mathrm{int}(A)=\bigvee\{B\in L^X: B\leqslant A, B\in\omega\beta O(L^X)\}$, $\omega\beta\mathrm{cl}(A)=\bigwedge\{B\in L^X: A\leqslant B, B\in\omega\beta C(L^X)\}$. 分别称 $\omega\beta\mathrm{int}(A)$ 和 $\omega\beta\mathrm{cl}(A)$ 为 A 的 $\omega\beta$ -内部和 $\omega\beta$ -闭包.

定义 3　设 (L^X, Ω) 为 $L\omega$ -空间, $x_\lambda\in M^*(L^X)$, $Q\in L^X$, $P\in\omega\beta C(L^X)$. 如果 $x_\lambda\not\leqslant P$, 称 P 为 x_λ 的 $\omega\beta$ -闭远域, x_λ 的所有 $\omega\beta$ -闭远域之集记为 $\omega\beta\eta^-(x_\lambda)$. 如果存在 x_λ 的 $\omega\beta$ -闭远域 P, 使得 $Q\leqslant P$, 称 Q 为 x_λ 的 $\omega\beta$ -远域, x_λ 的所有 $\omega\beta$ -远域之集记为 $\omega\beta\eta(x_\lambda)$.

---

① 收稿日期: 2018-05-15

基金项目: 国家自然科学基金天元基金项目(11326073); 重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500312); 重庆市科学技术委员会研究项目(cstc2017jcyjAX0022).

作者简介: 陈　波(1979-), 男, 讲师, 主要从事格上拓扑的研究.

定义4 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$A,B \in L^X$. 如果$\omega\beta\mathrm{cl}(A) \wedge B = B \wedge \omega\beta\mathrm{cl}(A) = \underline{0}$，称$A,B$是$\omega\beta$-隔离集.

定义5 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$A \in L^X$. 如果不存在非零$\omega\beta$-隔离集C,D，使得$A = C \vee D$，称A为$\omega\beta$-连通集. 如果$\underline{1}$是$\omega\beta$-连通的，称(L^X, Ω)为$\omega\beta$-连通空间.

定理1(樊畿定理) 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$A \in L^X$. A是$\omega\beta$-连通的当且仅当对任意的$\omega\beta$-闭远域，映射$P: M^*(A) \longrightarrow \bigcup\{\omega\beta\eta(e): e \in M^*(A)\}(P(e) \in \omega\beta\eta(e), e \in M^*(A))$以及$A$的任意分子$a,b$，存在$A$中有限多个分子$e_1 = a, e_2, \cdots, e_n = b$，使得$A \not\leqslant P(e_i) \vee P(e_{i+1})(i = 1,2,\cdots,n-1)$.

证 充分性 假设A不是$\omega\beta$-连通集. 则存在两个非零$\omega\beta$-隔离L-集合B,C，使得$A = B \vee C$. 定义映射$P: M^*(A) \longrightarrow \bigcup\{\omega\beta\eta(e): e \in M^*(A)\}$为

$$P(e) = \begin{cases} \omega\beta\mathrm{cl}(C) & e \leqslant B \\ \omega\beta\mathrm{cl}(B) & e \leqslant C \end{cases}$$

由于$\omega\beta\mathrm{cl}(B) \wedge C = B \wedge \omega\beta\mathrm{cl}(C) = \underline{0}$，则$e \not\leqslant P(e)$. 而$P(e)$是$\omega\beta$-闭的$L$-集合，对任意$e \in M^*(A)$，均有$P(e) \in \omega\beta\eta(e)$. 任取分子$a,b \in M^*(A)$，使得$a \leqslant B$，$b \leqslant C$. 由条件，对任意有限个点$e_1 = a$，$e_2, \cdots, e_n = b$，或者$e_i \leqslant B$，或者$e_i \leqslant C$成立. 于是$P(e_i) = \omega\beta\mathrm{cl}(B)$，或$P(e_i) = \omega\beta\mathrm{cl}(C)$. 又因$P(e_1) = \omega\beta\mathrm{cl}(C)$且$P(e_n) = \omega\beta\mathrm{cl}(B)$，于是存在$j(j = 1,2,\cdots,n-1)$，满足$P(e_j) = \omega\beta\mathrm{cl}(C)$且$P(e_{j+1}) = \omega\beta\mathrm{cl}(B)$. 则$A = B \vee C \leqslant P(e_j) \vee P(e_{j+1})$，与假设矛盾.

必要性 假设结论不真，即存在分子点$a,b \in M^*(A)$以及$\omega\beta$-闭远域，映射$P: M^*(A) \longrightarrow \bigcup\{\omega\beta\eta(e): e \in M^*(A)\}$，使得对任意有限个点$e_1, \cdots, e_n \in M^*(A)$，$A \not\leqslant P(e_i) \vee P(e_{i+1})(i = 1,2,\cdots,n-1)$均不成立. 为方便，定义分子$a$与$b$是$\omega\beta$-连接的，即存在有限个点$e_1 = a, e_2, \cdots, e_n = b \in M^*(A)$，使得$A \not\leqslant P(e_i) \vee P(e_{i+1})(i = 1,2,\cdots,n-1)$. 否则，称$a$与$b$不是$\omega\beta$-连接的.

令：

$$\Phi = \{e \in M^*(A): a \text{ 与 } e \text{ 是 } \omega\beta\text{-连接的}\}$$

$$\Psi = \{e \in M^*(A): a \text{ 与 } e \text{ 不是 } \omega\beta\text{-连接的}\}$$

$$B = \vee\, \Phi \qquad C = \vee\, \Psi.$$

显然，由于$a \not\leqslant P(a)$蕴含$A \not\leqslant P(a)$，则a与a是$\omega\beta$-连接的. 从而，$a \in \Phi$，$a \leqslant B$. 由假设，a与b不是$\omega\beta$-连接的，则$b \in \Psi$且$b \leqslant C$. 于是，$B \neq \underline{0}$且$C \neq \underline{0}$. 由于对任意的分子$e \in M^*(A)$，$e \in \Phi$或者$e \in \Psi$，则$A = B \vee C$. 下面证明$\omega\beta\mathrm{cl}(B) \wedge C = B \wedge \omega\beta\mathrm{cl}(C) = \underline{0}$，从而$A$不是$\omega\beta$-连通集，矛盾.

实际上，假设$\omega\beta\mathrm{cl}(B) \wedge C \neq \underline{0}$. 任取点$d \leqslant \omega\beta\mathrm{cl}(B) \wedge C$. 由$d \leqslant \omega\beta\mathrm{cl}(B)$，得到$d \not\leqslant P(d)$且$B \not\leqslant P(d)$. 于是，存在点$e \in \Phi$使得$e \not\leqslant P(d)$. 从而$e \not\leqslant P(d) \vee P(e)$且$e \leqslant B \leqslant A$，即$A \not\leqslant P(d) \vee P(e)$. 又因$e$与$a$是$\omega\beta$-连接的，则$a$与$d$是$\omega\beta$-连接的. 另一方面，由$d \leqslant C$，得到$C \not\leqslant P(d)$. 存在$\lambda \in \Psi$使得$\lambda \not\leqslant P(d)$. 从而$\lambda \not\leqslant P(d) \vee P(\lambda)$且$\lambda \leqslant C \leqslant A$，则$A \not\leqslant P(d) \vee P(\lambda)$. 由于$d$与$a$是$\omega\beta$-连通的，则$a$与$\lambda$是$\omega\beta$-连接的，这与$\lambda \in \Psi$矛盾. 从而$\omega\beta\mathrm{cl}(B) \wedge C = \underline{0}$. 相应地，能证明$B \wedge \omega\beta\mathrm{cl}(C) = \underline{0}$.

应用$\omega\beta$-连通性的樊畿定理，可得到以下结论：

定理2 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$A \in L^X$是$\omega\beta$-连通子集. $B \in L^X$满足$A \leqslant B \leqslant \omega\beta\mathrm{cl}(A)$，则$B$是$\omega\beta$-连通子集.

证 当$A = \underline{0}$时，由$A \leqslant B \leqslant \omega\beta\mathrm{cl}(A)$知$B = \underline{0}$是$\omega\beta$-连通子集.

当$A \neq \underline{0}$时，任取B的分子a,b以及映射$P: M^*(B) \longrightarrow \bigcup\{\omega\beta\eta(e): e \in M^*(A)\}$. 由$a \leqslant \omega\beta\mathrm{cl}(A)$知$A \not\leqslant P(a)$，故存在$c \in M^*(A)$使得$c \not\leqslant P(a)$. 于是$P(a) \in \omega\beta\eta(c)$. 由$b \leqslant \omega\beta\mathrm{cl}(A)$知$A \not\leqslant P(b)$，故存在$d \in M^*(A)$使得$d \not\leqslant P(b)$，于是$P(b) \in \omega\beta\eta(d)$. 作映射$P': M^*(A) \longrightarrow \bigcup\{\omega\beta\eta(x): x \in M^*(A)\}$为：当$x \neq c$，$x \neq d$时，$P'(x) = P(x)$；当$x = c$时，$P'(x) = P(a)$；当$x = d$时，$P'(x) = P(b)$. 因$A$是$\omega\beta$-连通集，故存在$A$中有限多个分子$x_0 = c, x_1, \cdots, x_n = d$，使得$A \not\leqslant P(x_i) \vee P(x_{i+1})(i = 0,1,\cdots,n-1)$. 因此，在$B$中有分子$x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b$，使得$A \not\leqslant P(x_i) \vee P(x_{i+1})(i = 0,1,\cdots,n-1)$. 由定

理 1，B 是 $\omega\beta$ -连通子集.

参考文献：

[1] LI S G. Connectedness in L-Fuzzy Topological Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems，2000，116(2)：361-368.

[2] SHI F G，ZHENG C Y. Connectedness in Fuzzy Topological Molecular Lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，29(3)：363-370.

[3] BAI S Z，WANG W L. I Type of Strong Connectivity in L-Fuzzy Topological Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems，1998，99(3)：357-362.

[4] LIU Y M，LUO M K. Fuzzy Topology [M]. Singapore：World Scientific，1997.

[5] 王国俊. L-Fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，1988.

[6] 程吉树. δ -连续序同态的若干性质 [J]. 模糊系统与数学，1997，11(4)：38-41.

[7] SAHA S. Fuzzy δ-Continuoua Mappings [J]. J Math Anal Appl，1987，126：130-142.

[8] CHEN S L，CHEN S T. A New Extension of Fuzzy Convergence [J]. Fuzzy Sets and Systems，2000，109(2)：199-204.

[9] CHEN S L，WU J R. *SR*-Convergence Theory in L-Fuzzy Lattices [J]. Information Sciences，2000，125(1)：233-247.

[10] 陈水利，董长清. L-Fuzzy 保序算子空间 [J]. 模糊系统与数学，2002，16(9)：36-41.

[11] 黄朝霞. LF 保序算子空间的 ω -连通性 [J]. 数学杂志，2007，27(3)：343-347.

[12] 陈　波，刘建军. L-Fuzzy 保序算子空间的 ω-Lindelöf 可数性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2006，31(4)：32-34.

[13] 黄金兰，陈水利. L_k -空间中的 k-Tychonoff 分离性 [J]. 模糊系统与数学，2012，26(4)：43-48.

[14] BALASUBRAMANIAN G. Fuzzy β-Open Sets and Fuzzy β-Separation Axioms [J]. Kybernetika，1999，35(2)：215-223.

[15] HANAFY I M. Fuzzy β-Compactness and Fuzzy β-Closed Spaces [J]. Turk J Math，2004，28(1)：281-293.

[16] 陈　波，曾春娜. $L\omega$ -空间的 $\omega\beta$ -连通性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：71-75.

[17] JOHN L K. General Topology [M]. New York：Springer Verlag，1955.

K Fan's Theorem of $\omega\beta$-connectedness in $L\omega$-Spaces

CHEN　Bo

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the characterizations of $\omega\beta$-connectedness in $L\omega$-space have been discussed. K Fan's theorem of $\omega\beta$-connectedness in $L\omega$-spaces is given by means of $\omega\beta$-remote neighborhoods，and one basic property of $\omega\beta$-connectedness is discussed as application of K Fan's theorem of $\omega\beta$-connectedness.

Key words：$L\omega$-space；K Fan's theorem；$\omega\beta$-connectedness；$\omega\beta$-remote neighborhood

责任编辑　廖　坤