第 44 卷 第 6 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2019 年 6 月
Vol. 44 No. 6　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jun. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.06.021

泛函分析课程中有界算子理论的教学探讨①

李　嘉[1]，　蔡　静[1]，　周　燕[2]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 西南大学 图书馆，重庆 400715

摘要： 泛函分析课程是一门极其重要的数学专业课程，兼有理论性强和高度的抽象性等特点，采用传统的教师为主体的教学模式往往教学效果不佳. 以有界算子理论这部分内容为例探索了研讨型教学模式，主要对比了l^1空间上有界线性算子全体与列和有界的无限维矩阵空间的等距同构关系，以及c_0空间上有界线性算子全体与行和有界且每列元素趋于 0 的无限维矩阵空间的等距同构关系. 讨论了序列空间l^∞到l^∞中的有界线性算子全体与无限维矩阵空间的关系. 证明了行和有界的无限维矩阵可诱导出一个l^∞到l^∞的有界线性算子，通过反例说明了此对应不构成l^∞上的有界线性算子与行和有界的无限维矩阵空间的同构映射，丰富了泛函分析的教学内容和方法.

关　键　词： 有界线性算子；序列空间l^1；序列空间c_0；序列空间l^∞；无限维矩阵；研讨型教学模式

中图分类号：G642　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)06-0123-04

泛函分析是研究无限维线性空间及其上的算子理论的一门学科，对学生思维能力的培养以及进一步的数学深造和研究起着关键性作用，尤其对于应用科学研究来说，它是必不可少的工具. 但是，由于其高度的抽象性，使得学生在学习过程中往往遇到很多困难，如只是机械地记定理，读懂证明，而对有关理论的认识不深刻，缺乏应用. 造成此种状况的原因在于没有充分调动学生思考问题、解决问题的主动性，学生是被动地接受知识而非主动地积极思考. 因此，尝试在教学中改变以往传统的讲授方式，采用研讨型教学模式，即在适当的部分提出问题，这些问题不仅包括书中能找到答案的问题，同时还包括书中无法找到答案的问题，通过适当引导，鼓励学生思考，培养学生的创新思维，提高学生的学习兴趣，充分调动学生学习的积极性和主动性. 这样既可以加深学生对知识内容的理解和掌握，又可以培养学生的应用能力，从而大大提高学生对泛函分析甚至其它后继数学课程学习的兴趣. 研讨型教学方法实际上已经成为许多本科专业教育教学的改革方向和发展目标[1-4].

比如泛函分析课程中有界算子理论这部分内容，事实证明，在教学中增加学生参与探索的过程有事半功倍的效果. 通过对教材的学习，学生知道对于有限维线性空间，当基选定后，其上的有界线性算子空间与矩阵空间是同构的[5-7]. 讲授中教师可提出拓展性问题：对于无限维空间，比如序列空间l^1, c_0, l^∞，其上的有界线性算子是否与无限维矩阵有类似的对应关系呢? 教师可指导学生查阅文献，让他们知道：序列空间l^1上的有界算子空间$\mathscr{B}(l^1 \longrightarrow l^1)$与无限维列和有界矩阵空间$\mathscr{F} = \{\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{+\infty}$：存在$K > 0$，对任意$j$，$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}| \leqslant K\}$等距同构；$c_0$上的有界算子空间$\mathscr{B}(c_0 \longrightarrow c_0)$与无限维行和有界矩阵空间$\mathscr{F} = \{\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{+\infty}$：存在$K > 0$，对任意$i$，$\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}| \leqslant K$；对任意$j$，$\lim_{i \to +\infty} a_{ij} = 0\}$等距同构(参见文献[8-11]). 类似地，可引导学生思考：对于序列空间l^∞到l^∞中的有界线性算子空间$\mathscr{B}(l^\infty \longrightarrow l^\infty)$，它是否与某类无限维

① 收稿日期：2018-08-30
基金项目：西南大学教育教学改革研究项目(2018JY060)；西南大学教育教学改革研究重点项目(2015JY059)；中央高校基金一般项目(SWU1509196).
作者简介：李　嘉(1981-)，女，副教授，主要从事算子理论与动力系统的研究.

矩阵空间有类似关系呢?

首先，根据对l^1,c_0 上的有界算子的分析经验(参见文献[9])，由接下来的讨论可以得到任意一个行和有界的无限维矩阵可诱导出一个l^∞ 到l^∞ 的有界线性算子.

命题 1　若无限维矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{+\infty}$ 满足行和有界，即$\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|<+\infty$，则算子

$$\mathscr{A}:\ \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\infty \longmapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$$

是l^∞ 到l^∞ 中的有界线性算子，且 $\|\boldsymbol{A}\|=\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|$，其中

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&\cdots\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}a_{1j}\xi_j\\\sum\limits_{j=1}^{+\infty}a_{2j}\xi_j\\\vdots\\\sum\limits_{j=1}^{+\infty}a_{nj}\xi_j\\\vdots\end{bmatrix}$$

证　易证 $\mathscr{A}$是线性的，又由

$$\sup_i\left|\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\xi_j\right|\leqslant\sup_i\sum_{j=1}^{+\infty}(|a_{ij}|\,\|\boldsymbol{x}\|)=\|\boldsymbol{x}\|\sup_i\sum_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|$$

知 $\mathscr{A}$是l^∞ 到l^∞ 的有界线性算子，且

$$\|\mathscr{A}\|\leqslant\sup_i\sum_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|$$

对任意 i，取

$$\boldsymbol{x}_i=(\mathrm{sgn}(a_{i1}),\mathrm{sgn}(a_{i2}),\cdots,\mathrm{sgn}(a_{in}),\cdots)$$

则$\boldsymbol{x}_i\in l^\infty(\boldsymbol{x}_i=0$ 或 $\|\boldsymbol{x}_i\|=1)$，且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}=\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{1j}\mathrm{sgn}(a_{ij}),\sum_{j=1}^{+\infty}a_{2j}\mathrm{sgn}(a_{ij}),\cdots,\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\mathrm{sgn}(a_{ij}),\cdots\Big)^{\mathrm{T}}$$

总有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\|\geqslant\left|\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\mathrm{sgn}(a_{ij})\right|=\sum_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|$$

所以对任意 i，有 $\|\mathscr{A}\|\geqslant\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|$，从而 $\|\mathscr{A}\|\geqslant\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|$，故有

$$\|\mathscr{A}\|=\sup_i\sum_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|$$

由文献[9]知，对任意 $\boldsymbol{B}\in\mathscr{B}(l^1\longrightarrow l^1)$，设

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j=(\xi_{1j},\xi_{2j},\cdots,\xi_{nj},\cdots)^{\mathrm{T}}$$

其中:

$$\boldsymbol{e}_j=(\delta_{1j},\delta_{2j},\cdots,\delta_{nj},\cdots)$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1&i=j\\0&i\neq j\end{cases}$$

则由

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_n,\cdots)=\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}&\cdots&\xi_{1n}&\cdots\\\xi_{21}&\xi_{22}&\cdots&\xi_{2n}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\\\xi_{n1}&\xi_{n2}&\cdots&\xi_{nn}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

可得到一个列和有界矩阵，而由此列和有界矩阵又可诱导一个l^1 到l^1 的有界线性算子$\boldsymbol{B}_0$. 由文献[9] 知此$\boldsymbol{B}_0$ 与原来的算子 $\boldsymbol{B}$ 为同一算子，即$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}$.

对于c_0 空间有类似结论.

对于l^∞ 空间，学生可尝试比照l^1,c_0 空间的情形进行讨论. 类似地，对任意 $\boldsymbol{B}\in\mathscr{B}(l^\infty\longrightarrow l^\infty)$，设

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j=(\xi_{1j},\ \xi_{2j},\ \cdots,\ \xi_{nj},\ \cdots)^{\mathrm{T}}$$

可以证明

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_n,\ \cdots)=\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}&\cdots&\xi_{1n}&\cdots\\\xi_{21}&\xi_{22}&\cdots&\xi_{2n}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\\\xi_{n1}&\xi_{n2}&\cdots&\xi_{nn}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

为一个行和有界矩阵. 而由命题 1，一个行和有界矩阵可诱导出一个l^∞ 到l^∞ 的有界线性算子，记为$\boldsymbol{B}_0$，此$\boldsymbol{B}_0$ 与原来的算子$\boldsymbol{B}$ 是否也为同一算子呢?可引导学生尝试进行证明. 在尝试的过程中，学生会试图借用当初对l^1,c_0 空间的讨论思想和方法，此时会发现，在之前的讨论中用到了$\mathrm{span}_i\{e_i\}$ 分别在l^1 及c_0 空间中稠密，但注意到，$\mathrm{span}_i\{e_i\}$ 在l^∞ 中却是不稠密的. 事实上，我们可以给出具体的反例[12]，说明对于l^∞ 空间，前面给出的$\boldsymbol{B}_0$ 与原来的算子 $\boldsymbol{B}$ 不一定为同一算子.

首先，定义l^∞ 的子空间

$$c=\{(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots):\text{序列}\{\xi_n\}\text{收敛}\}$$

上的泛函

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\lim_{n\to\infty}\xi_n$$

其中

$$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\in c\subset l^\infty$$

由极限运算的线性性易知，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 c 上的线性泛函. 又因为对任意 $\boldsymbol{x}\in c$，有

$$|\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ |=|\lim_{n\to\infty}\xi_n\ |=\lim_{n\to\infty}|\ \xi_n\ |\leqslant\lim_{n\to\infty}\|\ \boldsymbol{x}\ \|=\|\ \boldsymbol{x}\ \|$$

所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 c 上的连续线性泛函，且 $\|\ \boldsymbol{f}\ \|\leqslant 1$.

由 Hahn-Banach 延拓定理，可得l^∞ 上的连续线性泛函 $\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$，当 $\boldsymbol{x}\in c$ 时，满足：

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\qquad \|\ \widetilde{\boldsymbol{f}}\ \|_{l^\infty}=\|\ \boldsymbol{f}\ \|_c$$

对任意 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\in l^\infty$，定义

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=(\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}),\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)$$

显然对任意 $\boldsymbol{x}\in l^\infty$，有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\in l^\infty$，且

$$\|\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\ \|=|\ \widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})\ |\leqslant\|\ \widetilde{\boldsymbol{f}}\ \|(\boldsymbol{x})$$

又由 $\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ 的线性性易知，$\boldsymbol{B}$ 是线性算子，即 $\boldsymbol{B}\in\mathscr{B}(l^\infty\longrightarrow l^\infty)$.

由 $\boldsymbol{B}$ 的定义易得，对任意$\boldsymbol{e}_j=(\delta_{1j},\ \delta_{2j},\ \cdots,\ \delta_{ij},\ \cdots)\in l^\infty$，有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j=(\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_j),\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_j),\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)$$

从而

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_n,\ \cdots)=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\cdots\\0&0&\cdots&0&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\\0&0&\cdots&0&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

则由此矩阵诱导的算子$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}$. 但对 $\boldsymbol{y}=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots)\in l^\infty$，有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)$$

即 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}_0\neq\boldsymbol{B}$.

在整个问题的讨论中，学生的收获是很大的．从知识方面来说，势必对序列空间、有界线性算子理论有更深刻的认识和理解．更重要的是，从学习能力方面来说，学生学会了查阅资料，利用参考文献中的思想方法发现问题、解决问题，体验了科研创新的成就感，势必对后续内容及课程的学习起到积极的作用．

参考文献：

[1] 张 伟．单片机与接口技术课程研究型教学模式探究 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(6)：190-194.

[2] 刘海燕，赵 会．研究型教学模式的实践探索——以《公共政策分析》课程为例 [J]．高等财经教育研究，2018，21(2)：51-55.

[3] 喻厚义，唐 康．研究性学习在线性变换教学中的应用 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(10)：168-172.

[4] 付 琛，王杨璐，彭希希，等．以药用植物内生菌及其天然产物为例探索药学研究型教学 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(5)：157-160.

[5] 程其襄，张奠宙，魏国强，等．实变函数与泛函分析基础 [M]．3 版．北京：高等教育出版社，2010.

[6] 夏道行，吴卓人，严绍宗，等．实变函数论与泛函分析 [M]．2 版．北京：高等教育出版社，2010.

[7] 张恭庆，林源渠．泛函分析讲义(上册) [M]．北京：北京大学出版社，1987.

[8] 徐光甫，王 强，王景恒．$n\times n$ 阵列到自身的有界线性算子族问题 [J]．延边大学学报(自然科学版)，2005，31(2)：92-96.

[9] 李 嘉，李扬荣．关于序列空间上的有界线性算子的教学探讨[J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(6)：225-229.

[10] LI J, LI Y R. Adjoint Semigroups on Sequence Banach Spaces [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(5)：776-781.

[11] 王廷辅，石忠锐，张若君．关于某些类序列空间上线性有界算子的矩阵表达及范数计算 [J]．工程数学学报，1996，13(2)：1-10.

[12] 李 春．反例在泛函分析教学中的作用 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(6)：230-232.

A Discussion on Teaching of Bounded Operators in Functional Analysis

LI Jia[1], CAI Jing[1], ZHOU Yan[2]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. Library of Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The course of Functional Analysis is an important professional course, which is characterized by extremely abstract and theoretical. The traditional teaching mode, which takes the teacher as the main body in the class, leads to poor teaching effect. Thus, the seminar teaching mode is practiced in the teaching of theory of bounded linear operators. Based on the discussion of the relationship between infinite matrix spaces and bounded linear operators on sequence spaces l^1 and c_0 respectively, the relationship between infinite matrix spaces and bounded linear operators on l^∞ is discussed. That every infinite matrix can lead to a bounded linear operator on l^∞ is proved. However, the correspondence isn't an isomorphism, which is explained by an counter-example. Thus, the teaching content and method about bounded linear operators in the Function Analysis course is enriched.

Key words: bounded linear operators; sequence space l^1; sequence space c_0; sequence space l^∞; infinite matrix; the seminar teaching mode

责任编辑 廖 坤