DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.07.001

三阶非线性模糊差分方程动力学行为分析①

张千宏, 王贵英

贵州财经大学 数学与统计学院,贵阳 550025

摘要: 研究一类三阶非线性模糊差分方程正解的存在性及渐近行为

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}}{A+x_{n-2}x_{n-1}x_{n}},\ n=0,1,\cdots$$

其中(x_n)是正模糊数数列,A 及初始值 x_{-2}, x_{-1}, x_0 是正模糊数. 最后给出数值例子以验证理论结论的正确性.

关 键 词: 模糊差分方程;平衡点;有解性;持久性;渐近稳定

中图分类号: O175.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)07-0001-07

差分方程(系统)作为微分方程及时滞微分方程的离散形式,在经济学、生态学、计算机、系统工程学等学科上有很多应用,取得了不少成果[1-9]. 模糊差分方程是差分方程的一种推广形式,系统中参数及初始值为模糊数,解为模糊数数列. 最近有关模糊差分方程解的动力学行为研究已引起部分学者的关注,取得了一些有意义的成果[10-22],基于此,本文进一步讨论如下三阶非线性模糊差分方程

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}}{A+x_{n-2}x_{n-1}x_{n}},\ n=0,1,\cdots \tag{1}$$

其中:A 是正模糊数;初始值 x_{-2}, x_{-1}, x_0 是正模糊数.

为方便起见,首先给出下列定义:

定义 1 A 为模糊数,如果 $A: \mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ 满足(i)-(iv)

(i) A 是正规的,即存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $A(x)=1$;

(ii) A 是模糊凸的,即对所有 $t\in[0,1]$, $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$A(tx_1+(1-t)x_2)\geqslant\min\{A(x_1),\ A(x_2)\}$$

(iii) A 是上半连续的;

(iv) A 的支撑, $\operatorname{supp}A=\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[A]_\alpha}=\overline{\{x: A(x)>0\}}$ 是紧的.

A 的 α-截集表示为$[A]_\alpha=\{x\in\mathbb{R}: A(x)\geqslant\alpha\}$, $\alpha\in[0,1]$,显然$[A]_\alpha$是闭区间. 如果 $\operatorname{supp}A\subset(0,\infty)$,则模糊数是正的. 显然如果 A 是正实数,那么 A 是模糊数且$[A]_\alpha=[A, A]$, $\alpha\in(0,1]$. 即 A 是平凡的模糊数.

定义 2 设 A, B 是模糊数,$[A]_\alpha=[A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$, $[B]_\alpha=[B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$, $\alpha\in(0,1]$,模糊数空间的范数为:

$$\|A\|=\sup_{\alpha\in(0,1]}\max\{|A_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha}|\}$$

距离为

① 收稿日期:2017-09-29
基金项目:国家自然科学基金项目(11761018);贵州财经大学重点项目(2018XZD02).
作者简介:张千宏(1971-),男,博士,教授,主要从事模糊不确定动力系统,微分动力系统的研究.

$$D(A, B)=\sup_{\alpha\in(0,1]}\max\{|A_{l,\alpha}-B_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha}-B_{r,\alpha}|\}$$

根据文献[11,13]给出模糊数数列有界和持久性定义如下:

定义 3 如果存在一个正实数 M(或 N) 使得

$$\operatorname{supp}x_n\subset[M, \infty), n=1,2,\cdots$$

或

$$\operatorname{supp}x_n\subset(0, N], n=1,2,\cdots$$

则称模糊数数列(x_n)是持久的(或有界的).

如果存在正实数 $M,N>0$ 使得

$$\operatorname{supp}x_n\subset[M, N], n=1,2,\cdots$$

则称(x_n)是有界和持久的. 如果范数 $\|x_n\|$, $n=1,2,\cdots$, 是无界数列, 则称(x_n), $n=1,2,\cdots$, 是无界数列.

定义 4 如果正模糊数数列(x_n)满足方程(1), 则称 x_n 是方程(1) 的正解. 如果正模糊数 x 满足

$$x=\frac{x}{A+x^3}$$

则称正模糊数 x 是(1) 式的正平衡点.

定义 5 设正模糊数数列(x_n), 正模糊数 x 使得

$$[x_n]_\alpha=[L_{n,\alpha}, \mathbb{R}_{n,\alpha}], n=0,1,2,\cdots, \alpha\in(0, 1] \tag{2}$$

及

$$[x]_\alpha=[L_\alpha,\mathbb{R}_\alpha], \alpha\in(0, 1] \tag{3}$$

如果$\lim_{n\to\infty}D(x_n, x)=0$, 则 $n\to\infty$ 时, 模糊数数列(x_n)关于 D 收敛于模糊数 x.

定义 6 (i) 设方程(1) 有正平衡点 x, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得方程(1) 的每一个正解 x_n, 满足 $D(x_{-i}, x)\leqslant\delta$, $i=0,1,2$, 有 $D(x_n, x)\leqslant\varepsilon$, $n>0$, 则称方程(1) 的正平衡点 x 是稳定的.

(ii) 如果它是稳定的且当 $n\to\infty$ 时, 方程(1) 的每一个正解关于 D 收敛于正平衡点 x, 则称方程(1) 的正平衡点 x 是渐近稳定的.

1 主要结论

首先研究方程(1) 正解的存在性, 需要下面的引理.

引理 1[23] 设 f: $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 是连续的, A,B,C,D 是模糊数. 那么

$$[f(A, B, C, D)]_\alpha=f([A]_\alpha, [B]_\alpha, [C]_\alpha, [D]_\alpha), \alpha\in(0, 1] \tag{4}$$

引理 2[23] 设 $u\in E^\sim$ (模糊数空间), $[u]_\alpha=[u_-(\alpha), u_+(\alpha)]$, $\alpha\in(0, 1]$. 那么 $u_-(\alpha)$ 与 $u_+(\alpha)$ 可以看成$(0, 1]$上的函数, 满足

(i) $u_-(\alpha)$ 非减和左连续;

(ii) $u_+(\alpha)$ 非增和左连续;

(iii) $u_-(1)\leqslant u_+(1)$.

反之, 对任意定义在$(0, 1]$满足上面(i)-(iii) 的函数 $a(\alpha)$ 和 $b(\alpha)$, 存在 $u\in E^\sim$, 使得对任意 $\alpha\in(0, 1]$, $[u]_\alpha=[a(\alpha), b(\alpha)]$.

定理 1 考虑方程(1), 其中 A 是正模糊数. 那么对任意正模糊数 x_{-2},x_{-1},x_0, (1) 式存在唯一正解 x_n.

证 证明类似于命题 2.1[14], 略.

下面给出方程(1) 模糊正解的性质, 需要下面的引理.

引理 3 对于差分系统

$$y_{n+1}=\frac{y_{n-2}}{q+z_{n-2}z_{n-1}z_n}, z_{n+1}=\frac{z_{n-2}}{p+y_{n-2}y_{n-1}y_n}, n=0,1,\cdots \tag{5}$$

其中 p,q 及初始值 $y_{-i},z_{-i},i=0,1,2$ 是正实数. 以下结论成立:

(i) 系统(5) 的每一个正解(y_n, z_n)满足当 $n = 3k + i$，$i \in \{1, 2, 3\}$，$k = 1,2,\cdots$，

$$0 < y_n < \frac{1}{q^{k+1}}\max\{y_{-2}, y_{-1}, y_0\}, \ 0 < z_n < \frac{1}{p^{k+1}}\max\{z_{-2}, z_{-1}, z_0\} \tag{6}$$

(ii) 如果

$$p > 1, \ q > 1 \tag{7}$$

当 $n \to \infty$，系统(5) 的每一个正解(y_n, z_n)收敛于系统(5) 的平衡点$(0, 0)$.

(iii) 如果

$$p < 1, \ q < 1 \tag{8}$$

那么 $(0, 0)$ 与$(\sqrt[3]{1-p}, \sqrt[3]{1-q})$ 是不稳定的.

证　(i) 设$\{(y_n, z_n)\}$是系统(5) 的正解. 因为 $y_n > 0$ 与 $z_n > 0$，当 $n \geqslant -2$，由系统(5) 推出

$$y_n \leqslant \frac{1}{q}y_{n-3}, \ z_n \leqslant \frac{1}{p}z_{n-3}, \ n = 1,2,3,\cdots \tag{9}$$

设 v_n, w_n 是下面系统的解，

$$v_n = \frac{1}{q}v_{n-3}, \ w_n = \frac{1}{p}w_{n-3}, \ n \geqslant 1 \tag{10}$$

使得

$$v_{-2} = y_{-2}, \ v_{-1} = y_{-1}, \ v_0 = y_0, \ w_{-2} = z_{-2}, \ w_{-1} = z_{-1}, \ w_0 = z_0 \tag{11}$$

我们用归纳法证明

$$y_n \leqslant v_n, \ z_n \leqslant w_n, \ n = 3k + i, \ i = 1,2,3, \ k \in \mathbb{N}_+ \tag{12}$$

假设当 $k = m \geqslant 1$，(12) 式成立，那么由(9) 式得

$$y_{3(m+1)+i} \leqslant \frac{1}{q}y_{3m+i} \leqslant \frac{1}{q}v_{3m+i} = v_{3(m+1)+i}, \ z_{3(m+1)+i} \leqslant \frac{1}{p}z_{3m+i} \leqslant \frac{1}{p}w_{3m+i} = w_{3(m+1)+i} \tag{13}$$

故(12) 式是正确的. 由(10) 式与(11) 式有，当 $n = 3k + i$，$i = 1,2,3$，$k \geqslant 1$ 时

$$\begin{cases} v_{3k+i} = \dfrac{1}{q^{k+1}}v_{i-3} \\ w_{3k+i} = \dfrac{1}{p^{k+1}}w_{i-3} \end{cases} \tag{14}$$

那么由(9),(12),(14) 式可知(6) 式成立.

(ii) 由(6) 和(7) 式，显然 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(iii) 由(6) 和(8) 式，显然$(0, 0)$是局部不稳定的. 接下来证明平衡点$(\sqrt[3]{1-p}, \sqrt[3]{1-q})$是局部不稳定的. 容易得到系统(5) 关于平衡点$(\sqrt[3]{1-p}, \sqrt[3]{1-q})$的线性化系统

$$\Phi_{n+1} = G\Phi_n \tag{15}$$

其中

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ z_n \\ z_{n-1} \\ z_{n-2} \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{q} & \eta & \eta & \eta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \beta & 0 & 0 & \frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $\eta = -\sqrt[3]{(1-p)(1-q)^2}$，$\beta = -\sqrt[3]{(1-p)^2(1-q)}$. (15) 式的特征方程为

$$P(\lambda) = \lambda^6 - \eta\beta\lambda^4 - \left(2\eta\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\lambda^3 - 3\eta\beta\lambda^2 - 2\eta\beta\eta - \eta\beta + \frac{1}{pq} \tag{16}$$

由(16) 式有 6×6 矩阵

$$\sum_{6\times 6}=\begin{bmatrix}0 & -\left(2\eta\beta+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right) & -2\eta\beta & 0 & 0 & 0\\ 1 & -\eta\beta & -3\eta\beta & -\eta\beta+\dfrac{1}{pq} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\left(2\eta\beta+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right) & -2\eta\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\eta\beta & -3\eta\beta & -\eta\beta+\dfrac{1}{pq} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\left(2\eta\beta+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right) & -2\eta\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\eta\beta & -\eta\beta+\dfrac{1}{pq}\end{bmatrix}$$

显然不是所有 $\Delta_k>0$(其中 Δ_k, $k=1,2,\cdots,6$, 是矩阵 $\sum_{6\times 6}$ 的 k 阶顺序主子式). 因此由定理1.3.2[1] 知正平衡解($\sqrt[3]{1-p}$, $\sqrt[3]{1-q}$)是局部不稳定的.

定理 2 考虑模糊差分方程(1), 其中 A, x_{-i}, $i=0,1,2$ 是正模糊数. 那么下面的命题成立.

(i) 如果对任意 $\alpha\in(0,1]$ 使得

$$A_{l,\alpha}>p>1 \tag{17}$$

那么当 $n=3k+i$, $i=1,2,3$, $k\in\mathbb{N}_+$ 时, 方程(1)的每一个正解 x_n 满足,

$$[x_n]_\alpha=[L_{n,\alpha},\ \mathbb{R}_{n,\alpha}],\ 0<L_{n,\alpha}\leqslant\frac{1}{p^{k+1}}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{\mathbb{R}_{-i+1,\alpha}\},\ 0<\mathbb{R}_{n,\alpha}\leqslant\frac{1}{p^{k+1}}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{\mathbb{R}_{-i+1,\alpha}\}$$

(ii) 如果(17)式成立, 那么当 $n\to\infty$, 方程(1)的每一个正解 x_n 关于 D 收敛于平衡点 x.

证 (i) 设 x_n 是方程(1)具有初始值 x_{-2}, x_{-1}, x_0 的正解, 使得

$$[x_n]_\alpha=[L_{n,\alpha},\ \mathbb{R}_{n,\alpha}],\ \alpha\in(0,1],\ n=-2,-1,0,\cdots \tag{18}$$

那么按照文献[6]命题2.1的方法, 有($L_{n,\alpha}$, $\mathbb{R}_{n,\alpha}$), $n=0,1,\cdots$, 满足下面带参数的常差分系统

$$L_{n+1,\alpha}=\frac{L_{n-2,\alpha}}{A_{r,\alpha}+\mathbb{R}_{n-2,\alpha}\mathbb{R}_{n-1,\alpha}\mathbb{R}_{n,\alpha}},\ \mathbb{R}_{n+1,\alpha}=\frac{\mathbb{R}_{n-2,\alpha}}{A_{l,\alpha}+L_{n-2,\alpha}L_{n-1,\alpha}L_{n,\alpha}} \tag{19}$$

因(17)式满足, 由引理3(i)知 $L_{n,\alpha}$ 与 $\mathbb{R}_{n,\alpha}$ 满足

$$0<L_{n,\alpha}\leqslant\frac{1}{p^{k+1}}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{\mathbb{R}_{-i+1,\alpha}\},\ 0<\mathbb{R}_{n,\alpha}\leqslant\frac{1}{p^{k+1}}\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{\mathbb{R}_{-i+1,\alpha}\},\ \alpha\in(0,1]$$

(ii) 因(18)式成立, 那么按照文献[6]的命题2.3的方法, 有唯一的平衡点 x, 其中

$$[x]_\alpha=[L_\alpha,\ \mathbb{R}_\alpha]=[0,\ 0],\ \alpha\in(0,1] \tag{20}$$

设 x_n 是方程(1)的正解, 使得(18)式成立. 因(17)式成立, 应用引理3(ii)于系统(19), 有

$$\lim_{n\to\infty}L_{n,\alpha}=L_\alpha=0,\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{R}_{n,\alpha}=\mathbb{R}_\alpha=0 \tag{21}$$

由(21)式得

$$\lim_{n\to\infty}D(x_n,\ x)=\lim_{n\to\infty}\sup_{\alpha\in(0,1]}\{\max\{|L_{n,\alpha}-L_\alpha|,\ |\mathbb{R}_{n,\alpha}-\mathbb{R}_\alpha|\}\}=0$$

定理2(ii)得证.

定理 3 考虑模糊差分方程(1), 若 A 是正实数(平凡模糊数)使得 $0<A<1$, x_{-i}, $i=0,1,2$ 是正模糊数. 那么存在不稳定的平衡点0与 $x=\sqrt[3]{1-A}$.

证 显然0是方程(1)的平衡点. 对方程(1)的唯一正平衡点 x, 有下面的关系

$$L_\alpha=\frac{L_\alpha}{A+\mathbb{R}_\alpha^3},\ \mathbb{R}_\alpha=\frac{\mathbb{R}_\alpha}{A+L_\alpha^3} \tag{22}$$

由此有

$$[x]_\alpha=[L_\alpha,\ \mathbb{R}_\alpha],\ L_\alpha=\mathbb{R}_\alpha=\sqrt[3]{1-A}$$

应用引理3(iii)于系统(19), 平衡点0与 $x=\sqrt[3]{1-A}$ 是不稳定的.

2　数值例子

为验证结论的有效性，给出以下例子.

例　考虑三阶非线性模糊差分方程

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}}{A+x_{n-2}x_{n-1}x_n},\ n=0,1,\cdots \tag{23}$$

其中 A 是正模糊数，且

$$A(x)=\begin{cases}x-1.2 & 1.2\leqslant x\leqslant 2.2\\ -0.5x+2.1 & 2.2\leqslant x\leqslant 4.2\end{cases} \tag{24}$$

初始值 x_{-2},x_{-1},x_0 满足

$$x_{-2}(x)=\begin{cases}10x-2 & 0.2\leqslant x\leqslant 0.3\\ -\dfrac{10}{3}x+2 & 0.3\leqslant x\leqslant 0.6\end{cases}\qquad x_{-1}(x)=\begin{cases}5x-5 & 0.1\leqslant x\leqslant 0.3\\ -5x+2.5 & 0.3\leqslant x\leqslant 0.5\end{cases} \tag{25}$$

$$x_0(x)=\begin{cases}10x-1 & 0.1\leqslant x\leqslant 0.2\\ -5x+2 & 0.2\leqslant x\leqslant 0.4\end{cases} \tag{26}$$

由(25)式有

$$[A]_\alpha=[1.2+\alpha,\ 4.2-2\alpha],\ \alpha\in(0,\ 1] \tag{27}$$

所以$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[A]_\alpha}=[1.2,\ 4.2]$.

由(25)和(26)式，对 $\alpha\in(0,\ 1]$，

$$[x_{-2}]_\alpha=\left[0.2+\frac{1}{10}\alpha,\ 0.6-\frac{3}{10}\alpha\right]$$

$$[x_{-1}]_\alpha=\left[0.1+\frac{1}{5}\alpha,\ 0.5-\frac{1}{5}\alpha\right]$$

$$[x_0]_\alpha=\left[0.1+\frac{1}{10}\alpha,\ 0.4-\frac{1}{5}\alpha\right] \tag{28}$$

则$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[x_{-2}]_\alpha}=[0.2,\ 0.6]$，$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[x_{-1}]_\alpha}=[0.1,\ 0.5]$，$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[x_0]_\alpha}=[0.1,\ 0.4]$.

由(23)和(27)式得含参数 $\alpha\in(0,\ 1]$ 的差分系统

$$L_{n+1,\alpha}=\frac{L_{n-2,\alpha}}{4.2-2\alpha+\mathbb{R}_{n-2,\alpha}\mathbb{R}_{n-1,\alpha}\mathbb{R}_{n,\alpha}}$$

$$\mathbb{R}_{n+1,\alpha}=\frac{\mathbb{R}_{n-2,\alpha}}{1.2+\alpha+L_{n-2,\alpha}L_{n-1,\alpha}L_{n,\alpha}} \tag{29}$$

因此 $A_{l,\alpha}>1$，对任意 $\alpha\in(0,\ 1]$，即条件(17)满足，所以由定理2，方程(23)的每一个正解 x_n 是有界和持久的. 另外，方程(23)有唯一平衡解 $\bar{x}=0$，且当 $n\to\infty$ 时方程(23)的每一个正解 x_n 关于 D 收敛到唯一平衡点 0(图 1－图 4).

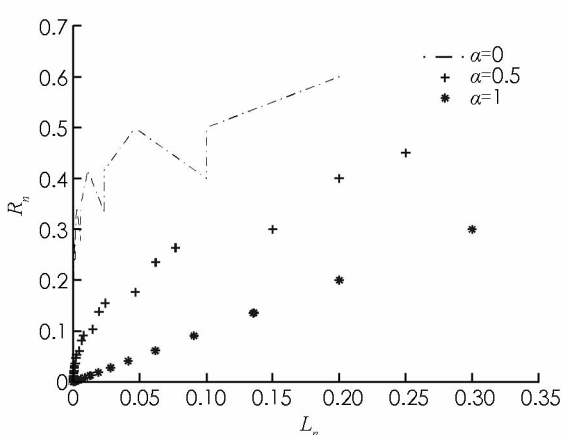

图 1　系统(29)的解

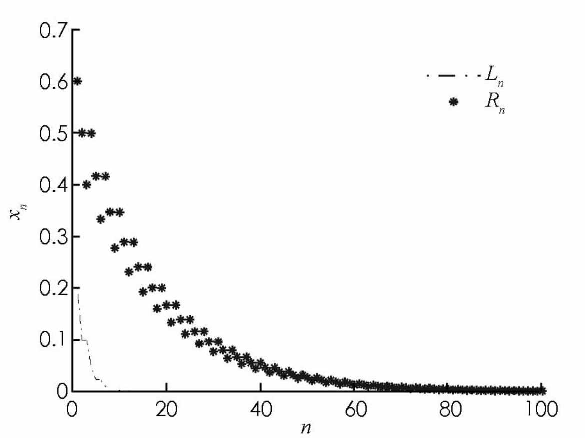

图 2　$\alpha=0$，系统(29)的解

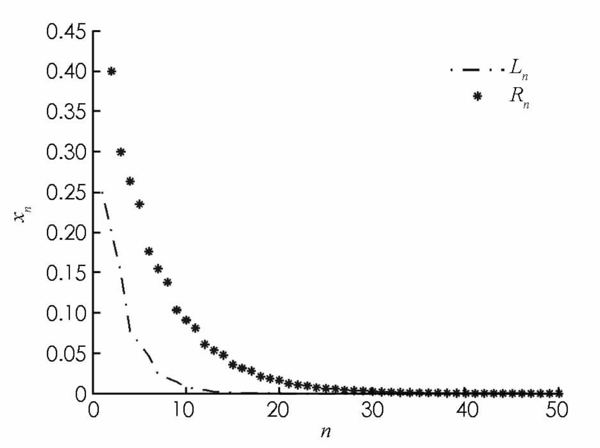

图 3 $\alpha=0.5$,系统(29)的解

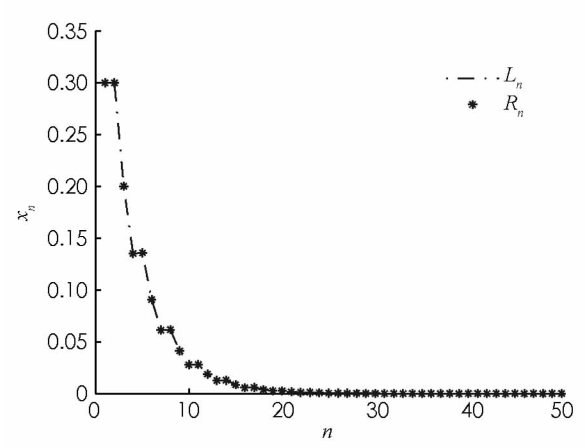

图 4 $\alpha=1$,系统(29)的解

参考文献:

[1] KOCIC V L, LADAS G. Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Application [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1993.

[2] ZHANG Q, YANG L, LIU J. Dynamics of a System of Rational Third-Order Difference Equation [J]. Advances in Difference Equations, 2012, 2012: 1-8.

[3] IBRAHIM T F, ZHANG Q. Stability of an Anti-competitive System of Rational Difference Equations [J]. Archives Des Sciences, 2013, 66(5): 44 - 58.

[4] KURBANLI A S, CINAR C, YALCINKAYA I. On the Behavior of Positive Solutions of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1}=x_{n-1}/(y_n x_{n-1})+1$; $y_{n+1}=y_{n-1}/(x_n y_{n-1})+1$ [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53(5-6): 1261-1267.

[5] DIN Q, IBRAHIM T F, KHAN K A. Behavior of a Competitive System of Second-Order Difference Equations [J]. The Scientific World Journal, 2014, 2014: 1-9.

[6] DIN Q, KHAN K A, NOSHEEN A. Stability Analysis of a System of Exponential Difference Equations [J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2014, 2014: 1-11.

[7] PAPASCHINOPOULOS G, SCHINAS C J. On the Dynamics of Two Exponential-Type Systems of Difference Equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64(7): 2326-2334.

[8] DIN Q, DONCHEV T. Global Character of A Host-parasite Model [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2013, 54: 1-7.

[9] ELSAYEDl E M, El-DEASOKY M M, ABDULLAHB A. On The Solutions of a General System of Difference Equations [J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012, 2012: 1-12.

[10] DEEBA, E Y, DE KORVIN A. Analysis by Fuzzy Difference Equations of a Model of CO2 Level in the Blood [J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12(3): 33-40.

[11] DEEBA E Y, DE KORVIN A, KOH E L. A Fuzzy Difference Equation with an Application [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 1996, 2(4): 365-374.

[12] PAPASCHINOPOULOS G, SCHINAS C J. On the Fuzzy Difference Equation $x_{n+1}=\sum_{i=0}^{k-1} A_i = x_{n-i}^{p_i}+1=x_{n-k}^{p_k}$ [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2000, 6(1): 75-89.

[13] PAPASCHINOPOULOS G, PAPADOPOULOS B K. On the Fuzzy Difference Equation $x_{n+1}=A+B=x_n$ [J]. Soft Computing, 2002, 6(6): 456-461.

[14] PAPASCHINOPOULOS G, PAPADOPOULOS B K. On the Fuzzy Difference Equation $x_{n+1}=A+x_n=x_{n-m}$ [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 129(1): 73-81.

[15] STEAFANIDOU G, PAPASCHINOPOULOS G. A Fuzzy Difference Equation of a Rational Form [J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2005, 12(sup 2): 300-315.

[16] PAPASCHINOPOULOS G, STEAFANIDOU G. Boundedness and Asymptotic Behavior of the Solutions of a Fuzzy Difference Equation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 140(3): 523-539.

[17] ZHANG Q，YANG L，LIAO D. Behavior of Solutions to a Fuzzy Nonlinear Difference Equation [J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems，2012，9(2)：1-12.

[18] ZHANG Q，YANG L，LIAO D. On First Order Fuzzy Riccati Difference Equation [J]. Information Sciences，2014，270：226-236.

[19] ZHANG Q，LIU J，LUO Z. Dynamical Behavior of a Third-Order Rational Fuzzy Difference Equation [J]. Advances in Difference Equations，2015，2015：1-18.

[20] STEFANIDOU G，PAPASCHINOPOULOS G，SCHINAS C J. On an Exponential-Type Fuzzy Difference Equation [J]. Advances in Difference Equations，2010，2010：1-19.

[21] MUKMINAH D，ABD FATAH W. Review on Fuzzy Difference Equation [J]. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences，2012，8(4)：172-176.

[22] 张千宏，杨利辉，廖代喜. 论一阶模糊差分方程 $x_{n+1}=\frac{a+bx_n}{A+x_{n-1}}$ [J]. 模糊系统与数学，2012，26(4)：99-107.

[23] WU C，ZHANG B. Embedding Problem of Noncompact Fuzzy Number Space $E^{\sim}$ [J]. Fuzzy Sets and Systems，1999，105(1)：165-169.

Dynamical Behavior of a Third-Order Nonlinear Fuzzy Difference Equation

ZHANG Qian-hong，　WANG Gui-ying

School of Mathematics and Statistics，Guizhou University of Finance and Economics，Guiyang 550025，China

Abstract：This paper is concerned with the existence，asymptotic behavior of the positive solutions of a third order fuzzy nonlinear difference equation

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}}{A+x_{n-2}x_{n-1}x_n},\ n=0,1,\cdots$$

where (x_n) is a sequence of positive fuzzy numbers，A and the initial values x_{-2}，x_{-1}，x_0 are positive fuzzy numbers. Finally an illustrative example is given to demonstrate the effectiveness of the results obtained.

Key words：fuzzy difference equation；equilibrium point；bounded；persistence；asymptotic stability

责任编辑　张　枸