第 44 卷 第 7 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 7 月
Vol. 44 No. 7　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jul. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.07.003

Banach 空间中集值隐函数的类 Lipschitz 性质及其应用①

肖成英[1]，　杨明歌[2]

1. 四川工商学院 云计算与智能信息处理重点实验室，成都 611745；
2. 上海大学 管理学院，上海 200444

摘要： 利用变分分析和广义微分的相关工具，在 Banach 空间中研究集值隐函数的稳定性，给出集值隐函数在给定点具有类 Lipschitz 性质的 Clarke 上导数充分条件. 作为应用，讨论参数向量优化问题有效解映射的稳定性，给出有效解映射在给定点具有类 Lipschitz 性质的 Clarke 上导数充分条件. 所得结果改进了相关文献中的结果.

关 键 词： 集值隐函数；稳定性分析；参数向量优化问题；有效解映射；类 Lipschitz 性质

中图分类号：O224　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)07-0017-06

集值隐函数的稳定性已被广泛研究[1-7]. 最近，文献[1]研究集值隐函数的类 Lipschitz 性质，利用 Fréchet 上导数和 Mordukhovich 上导数，在 Asplund 空间中给出集值隐函数在给定点具有类 Lipschitz 性质的充分条件，由此导出参数向量优化问题的有效解映射在给定点具有类 Lipschitz 性质的充分条件. 虽然文献[1]定理 3.1 在适当的条件下证明了集值隐函数在给定点是类 Lipschitz 的，但是该定理的证明过程并不严谨. 作者采用的是反证法，为了导出矛盾，需要证明：存在(x^*, y^*)和(x_3, y_3)满足$0 \notin F_{p'}(x_3)$，但不满足条件(iii). 遗憾的是，$0 \notin F_{p'}(x_3)$的证明被遗漏了，且难以从文献[1]定理 3.1 的假设条件推出. 为了解决这个问题，本文采用不同于文献[1]定理 3.1 的证明方法，给出集值隐函数在给定点是类 Lipschitz 的严格证明，证明过程避开了$0 \notin F_{p'}(x_3)$.

设 X 和 Y 是 Banach 空间，P 是度量空间，$F: P \times X \rightrightarrows Y$ 是集值映射，定义集值隐函数 $G: P \rightrightarrows X$ 如下：

$$G(p) := \{x \in X \mid 0 \in F(p, x)\} \tag{1}$$

下面讨论(1)式中的集值隐函数 G 的类 Lipschitz 性质，给出 G 在给定点类 Lipschitz 性质成立的上导数充分条件. 使用记号 $F_p(\cdot) := F(p, \cdot)$.

定理 1　设 X 和 Y 是 Banach 空间，P 是度量空间，$F: P \times X \rightrightarrows Y$ 是集值映射，$G: P \rightrightarrows X$ 是由(1)式定义的集值隐函数，$(\bar{p}, \bar{x}) \in P \times X$ 且 $0 \in F(\bar{p}, \bar{x})$. 若存在常数 $r > 0$ 满足下列条件：

(i) 任意的 $p \in B(\bar{p}, r)$，集值映射 F_p 是闭的；

(ii) 常数

$$\begin{aligned} k_r := \lim_{\delta \downarrow 0} \inf\{ \| x^* \| \mid & x^* \in D_c^* F_p(x, y)(y^*),\ p \in B(\bar{p}, r),\ x \in B(\bar{x}, r) \backslash G(p), \\ & y \in \textstyle\prod_\delta (0; F_p(x)) \cap B(0, r),\ y^* \in J_\delta(y)\} > 0 \end{aligned}$$

---

① 收稿日期：2018-07-31
基金项目：国家自然科学基金项目(11801352)；四川省教育厅科研项目(17ZB0265).
作者简介：肖成英(1979-)，女，讲师，主要从事非线性泛函分析及应用的研究.
通信作者：杨明歌，副教授.

其中:任意 $\delta>0$,$\prod_{\delta}(0;F_p(x)):=\{y\in F_p(x)\mid \|y\|<d(0,F_p(x))+\delta\}$,$J_{\delta}(y):=\{y^*\in S_{Y^*}\mid d(y^*,J(y))<\delta\}$;

(iii) 存在常数 $l>0$ 使得

$$F(p',x)\cap rB_Y\subset F(p,x)+ld(p',p)B_Y,\ \forall x\in B(\bar{x},r),\ \forall p,p'\in B(\bar{p},r)$$

则 G 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 是类 Lipschitz 的且具有系数 $\frac{l}{k_r}$.

证 任给常数 $r>0$ 和 $l>0$,假设满足定理1的条件.首先证明:任意的 $\mu\in(0,\min\{rk_r,r\})$,若 $(x,p)\in B\left(\bar{x},r-\frac{\mu}{k_r}\right)\times B(\bar{p},r)$ 且 $d(0,F(p,x))<\mu$,则

$$d(x,G(p))\leqslant\frac{1}{k_r}d(0,F(p,x))\tag{2}$$

采用反证法,假设(2)式不成立,则存在 $\mu\in(0,\min\{rk_r,r\})$,$x_0\in B\left(\bar{x},r-\frac{\mu}{k_r}\right)$ 和 $p_0\in B(\bar{p},r)$,满足 $d(0,F(p_0,x_0))<\mu$,但

$$d(x_0,G(p_0))>\frac{d(0,F(p_0,x_0))}{k_r}$$

从而 $x_0\notin G(p_0)$,即 $0\notin F(p_0,x_0)$.由条件(i),$d(0,F(p_0,x_0))>0$.令 $\varepsilon:=d(0,F(p_0,x_0))$,则 $\varepsilon\in(0,\mu)$.进一步,根据实数的稠密性,选取 $k\in\left(\frac{\varepsilon k_r}{\mu},k_r\right)$ 满足

$$d(x_0,G(p_0))>\frac{d(0,F(p_0,x_0))}{k}>\frac{d(0,F(p_0,x_0))}{k_r}\tag{3}$$

令 $\lambda:=\varepsilon k^{-1}$,则由(3)式得

$$d(x_0,G(p_0))>\frac{d(0,F(p_0,x_0))}{k}=\lambda\tag{4}$$

由距离函数的定义,任意的 $\alpha\in(0,r-\mu)$,存在 $y_0\in F(p_0,x_0)$,使得

$$\|y_0\|<d(0,F(p_0,x_0))+\alpha=\varepsilon+\alpha<\mu+\alpha<r\tag{5}$$

定义函数 $\varphi:X\times Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ 如下:

$$\varphi(x,y):=\|y\|+\delta_{\mathrm{gph}F_{p_0}}(x,y),\ \forall(x,y)\in X\times Y$$

由条件(i),φ 在 $X\times Y$ 上是下半连续的.由(5)式得

$$\varphi(x_0,y_0)=\|y_0\|<\varepsilon+\alpha+\inf_{(x,y)\in X\times Y}\varphi(x,y)$$

任意的 $\eta\in\left(0,\frac{\lambda}{\varepsilon+\alpha}\right)$,在乘积空间 $X\times Y$ 中使用范数 $\|(x,y)\|_{\eta}:=\|x\|+\eta\|y\|$.由文献[9]定理2.26中的 Ekeland 变分原理,存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 满足

$$\varphi(\hat{x},\hat{y})\leqslant\varphi(x_0,y_0),\ \|(\hat{x},\hat{y})-(x_0,y_0)\|_{\eta}\leqslant\lambda$$

和

$$\varphi(\hat{x},\hat{y})\leqslant\varphi(x,y)+\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}\|(\hat{x},\hat{y})-(x,y)\|_{\eta},\ \forall(x,y)\in X\times Y$$

从而

$$(\hat{x},\hat{y})\in\mathrm{gph}F_{p_0},\ \|\hat{y}\|\leqslant\|y_0\|<r,\ \|\hat{x}-x_0\|+\eta\|\hat{y}-y_0\|\leqslant\lambda\tag{6}$$

且

$$\|\hat{y}\|\leqslant\|y\|+\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(\|x-\hat{x}\|+\eta\|y-\hat{y}\|)+\delta_{\mathrm{gph}F_{p_0}}(x,y),\ \forall(x,y)\in X\times Y\tag{7}$$

由(4)式和(6)式,$\|\hat{x}-x_0\|\leqslant\lambda<d(x_0,G(p_0))$,从而 $\hat{x}\notin G(p_0)$,即 $0\notin F(p_0,\hat{x})$,故 $\hat{y}\neq0$.进一步,由(6)式和 k 的取法可知

$$\|\hat{x}-\bar{x}\| \leqslant \|\hat{x}-x_0\| + \|x_0-\bar{x}\| \leqslant \lambda + r - \mu k_r^{-1} = \varepsilon k^{-1} + r - \mu k_r^{-1} < r$$

定义函数 ψ：$X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 如下：

$$\psi(x, y) := \|y\| + \frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(\|x-\hat{x}\| + \eta\|y-\hat{y}\|), \ \forall (x, y) \in X \times Y$$

由(7)式易知，$(\hat{x}, \hat{y})$ 是函数 $\psi + \delta_{\mathrm{gph}F_{p_0}}$ 在 $X \times Y$ 上的极小值点. 注意到 $\hat{y} \neq 0$，由文献[8]命题 1.114 得

$$(0, 0) \in \partial_c \psi(\hat{x}, \hat{y}) + \partial_c \delta_{\mathrm{gph}} F_{p_0}(\hat{x}, \hat{y}) =$$

$$\{0\} \times J(\hat{y}) + \frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}(B_{X^*} \times \eta B_{Y^*}) + N_c((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}F_{p_0})$$

则存在 $y_1^* \in J(\hat{y})$ 和 $(x_2^*, y_2^*) \in B_{X^*} \times B_{Y^*}$ 使得

$$\left(-\frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*, -y_1^* - \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right) \in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}F_{p_0})$$

显然，

$$\left\|y_1^* + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\| \geqslant 1 - \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|y_2^*\| \geqslant 1 - \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda} > 0$$

令

$$\bar{x}^* := \frac{-\dfrac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*}{\left\|y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|}, \ \tilde{y}^* := \frac{y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*}{\left\|y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|}$$

则 $(\bar{x}^*, -\bar{y}^*) \in N_c((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}F_{p_0})$，故 $\tilde{x}^* \in D_c^* F_{p_0}(\hat{x}, \hat{y})(\tilde{y}^*)$. 任意的 $y \in F_{p_0}(\hat{x})$，由(7)式得

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|y\| + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|y-\hat{y}\| \leqslant \left[1 + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\right]\|y\| + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|\hat{y}\|$$

从而

$$\|\hat{y}\| \leqslant \left[1 + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\right]d(0, F_{p_0}(\hat{x})) + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}\|\hat{y}\|$$

故

$$\|\hat{y}\| \leqslant d(0, F_{p_0}(\hat{x})) + \frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda-(\varepsilon+\alpha)\eta}d(0, F_{p_0}(\hat{x})) \tag{8}$$

进一步，

$$\|\tilde{x}^*\| = \frac{\left\|\dfrac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}x_2^*\right\|}{\left\|y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|} \leqslant \frac{(\varepsilon+\alpha)k}{\varepsilon}\left[1 - \frac{(\varepsilon+\alpha)k\eta}{\varepsilon}\right]^{-1} \tag{9}$$

由于

$$1 - \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda} \leqslant \left\|y_1^* + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\| \leqslant 1 + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}$$

故

$$\left|1 - \left\|y_1^* + \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|\right| \leqslant \frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}$$

从而

$$\|\tilde{y}^* - y_1^*\| = \left\|\frac{y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*}{\left\|y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|} - y_1^*\right\| =$$

$$\frac{\left\|\left[1 - \left\|y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|\right]y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|}{\left\|y_1^* + \dfrac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|} \leqslant$$

$$\frac{\left|1-\left\|y_1^*+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}y_2^*\right\|\right|+\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}{1-\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}\leqslant$$

$$\frac{\frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}{1-\frac{(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda}}=\frac{2(\varepsilon+\alpha)\eta}{\lambda-(\varepsilon+\alpha)\eta} \tag{10}$$

对任意的 $\delta>0$，只要上述的 α 和 η 选取得充分小，由(8)，(9) 和(10) 式可得

$$\hat{y}\in\prod\nolimits_{\delta}(0;\ F_{p_0}(\hat{x})),\ \|\tilde{x}^*\|<k+\delta,\ \tilde{y}^*\in J_{\delta}(\hat{y})$$

令 $\delta\downarrow 0$，则 $\|\tilde{x}^*\|\leqslant k<k_r$，这与条件(ii) 矛盾，故(2) 式成立.

其次，任取 $\rho\in\left(0,\ r-\frac{\mu}{k_r}\right)$且 $2l\rho<\mu$，下面证明

$$G(p')\cap B(\bar{x},\ \rho)\subset G(p)+\frac{l}{k_r}d(p',\ p)B_X,\ \forall\, p',p\in B(\bar{p},\ \rho) \tag{11}$$

事实上，任意的 $p',p\in B(\bar{p},\ \rho)$，任意的 $x\in G(p')\cap B(\bar{x},\ \rho)$，显然 $0\in F(p',\ x)$. 由条件(iii)，$0\in F(p,\ x)+ld(p',\ p)B_Y$，故

$$d(0,\ F(p,\ x))\leqslant ld(p',\ p)\leqslant l[d(p',\ \bar{p})+d(\bar{p},\ p)]\leqslant 2l\rho<\mu \tag{12}$$

由(2) 和(12) 式得

$$d(x,\ G(p))\leqslant\frac{1}{k_r}d(0,\ F(p,\ x))\leqslant\frac{l}{k_r}d(p',\ p)$$

故

$$x\in G(p)+\frac{l}{k_r}d(p',\ p)B_X$$

即(11) 式成立. 因此，G 在$(\bar{p},\ \bar{x})$ 是类 Lipschitz 的且具有系数$\frac{l}{k_r}$.

注 1 定理 1 利用 Clarke 上导数，在 Banach 空间中给出集值隐函数在给定点具有类 Lipschitz 性质的充分条件，而文献[1] 定理 3.1 利用 Fréchet 上导数，在 Asplund 空间中给出集值隐函数在给定点具有类 Lipschitz 性质的充分条件. 定理 1 中的上导数条件(ii) 与文献[1] 定理 3.1 中的上导数条件(iii) 不同，定理 1 的证明方法与文献[1] 定理 3.1 的证明方法也不同. 由于采用了不同的证明方法，避免了证明 $0\notin F_{p'}(x_3)$，而在文献[1] 定理 3.1 的证明中，$0\notin F_{p'}(x_3)$ 是必要的，但却被遗漏了. 进一步，由定理 1 可知，若文献[6] 定理 7 中的 $J_{\delta}(y)$ 定义为 $J_{\delta}(y):=\{y^*\in S_{Y^*}\mid d(y^*,\ J(y))<\delta\}$，则结论仍然成立.

下面讨论集值隐函数的类 Lipschitz 性质在参数向量优化问题有效解映射的稳定性分析中的应用. 设 X 和 Y 是 Banach 空间，P 是度量空间，f: $P\times X\longrightarrow Y$ 是向量值函数，$K\subset Y$ 是顶点在原点的尖闭凸锥，$A\subset Y$，$y\in A$，则称 y 是 A 关于 K 的有效点(efficient point) 当且仅当$(y-K)\cap A=\{y\}$. A 的有效点的集合记为 $\mathrm{Eff}_K A$，规定 $\mathrm{Eff}_K\varnothing=\varnothing$.

考虑参数向量优化问题：

$$\mathrm{Eff}_K\{f(p,\ x)\mid x\in X\} \tag{13}$$

其中：x 是未知的决策变量，p 是参数. 任意的 $p\in P$，令

$$\mathscr{F}(p):=\mathrm{Eff}_K\{f(p,\ x)\mid x\in X\}$$

和

$$\mathscr{S}(p):=\{x\in X\mid f(p,\ x)\in\mathscr{F}(p)\} \tag{14}$$

则称 $\mathscr{F}$: $P\rightrightarrows Y$ 和 $\mathscr{S}$: $P\rightrightarrows X$ 分别为参数向量优化问题(13) 的有效点映射(efficient point multifunction) 和有效解映射(efficient solution map).

由定理 1 可知，若 F 满足一定的条件，则集值隐函数 G 在给定点是类 Lipschitz 的. 在此基础上，可以寻找有效解映射 $\mathscr{S}$在给定点具有类 Lipschitz 性质的充分条件. 注意到，有效解映射 $\mathscr{S}$可以用集值隐函数来

表达，即

$$\mathscr{S}(p):=\{x\in X \mid 0\in H(p,x)\}$$

其中 $H: P\times X \rightrightarrows Y$ 定义为

$$H(p,x):=-f(p,x)+\mathscr{F}(p) \tag{15}$$

事实上，H 是由目标函数 f 和有效点映射 $\mathscr{F}$ 构成的集值映射. 为清楚起见，记 $H_p(\cdot):=H(p,\cdot)$.

定理 2　设 X 和 Y 是 Banach 空间，P 是度量空间，$H: P\times X\rightrightarrows Y$ 是由(15) 式定义的集值映射，$\mathscr{S}: P\rightrightarrows X$ 是由(14) 式定义的有效解映射，$(\bar{p},\bar{x})\in P\times X$ 且 $(\bar{p},\bar{x})\in \operatorname{gph}\mathscr{S}$. 若存在常数 $r>0$ 满足下列条件：

(i) 任意的 $p\in B(\bar{p},r)$，集值映射 H_p 是闭的；

(ii) 常数

$$k_r:=\lim_{\delta\downarrow 0}\inf\{\|x^*\| \mid x^*\in D_c^*H_p(x,y)(y^*),\ p\in B(\bar{p},r),\ x\in B(\bar{x},r)\backslash\mathscr{S}(p),$$
$$y\in \textstyle\prod_\delta(0;H_p(x))\cap B(0,r),\ y^*\in J_\delta(y)\}>0$$

其中：任意 $\delta>0$，$\prod_\delta(0;H_p(x)):=\{y\in H_p(x)\mid \|y\|<d(0,H_p(x))+\delta\}$，$J_\delta(y):=\{y^*\in S_{Y^*}\mid d(y^*,J(y))<\delta\}$；

(iii) 存在常数 $l>0$ 使得

$$H(p',x)\cap rB_Y\subset H(p,x)+ld(p',p)B_Y,\ \forall x\in B(\bar{x},r),\ \forall p,p'\in B(\bar{p},r)$$

则有效解映射 $\mathscr{S}$ 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 是类 Lipschitz 的且具有系数 $\dfrac{l}{k_r}$.

证　注意到 $(\bar{p},\bar{x})\in \operatorname{gph}\mathscr{S}\Leftrightarrow 0\in H(\bar{p},\bar{x})$，分别用 H 和 $\mathscr{S}$ 代替定理 1 中的 F 和 G，可得定理 2 的结论.

由定理 2 可知，当 H 满足一定的条件时，有效解映射 $\mathscr{S}$ 在给定点是类 Lipschitz 的. 而 H 是由 f 和 $\mathscr{F}$ 构成的，故可以将定理 2 中的条件(iii) 换成由 f 和 $\mathscr{F}$ 刻画的条件，见下面的定理 3.

定理 3　设 X 和 Y 是 Banach 空间，P 是度量空间，$H: P\times X\rightrightarrows Y$ 是由(15) 式定义的集值映射，$\mathscr{S}: P\rightrightarrows X$ 是由(14) 式定义的有效解映射，$(\bar{p},\bar{x})\in P\times X$ 且 $(\bar{p},\bar{x})\in \operatorname{gph}\mathscr{S}$. 若 f 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 是严格可微的，且存在常数 $r>0$ 满足下列条件：

(i) 任意的 $p\in B(\bar{p},r)$，集值映射 H_p 是闭的；

(ii) 常数

$$k_r:=\lim_{\delta\downarrow 0}\inf\{\|x^*\| \mid x^*\in D_c^*H_p(x,y)(y^*),\ p\in B(\bar{p},r),\ x\in B(\bar{x},r)\backslash\mathscr{S}(p),$$
$$y\in \textstyle\prod_\delta(0;H_p(x))\cap B(0,r),\ y^*\in J_\delta(y)\}>0$$

其中：任意 $\delta>0$，$\prod_\delta(0;H_p(x)):=\{y\in H_p(x)\mid \|y\|<d(0,H_p(x))+\delta\}$，$J_\delta(y):=\{y^*\in S_{Y^*}\mid d(y^*,J(y))<\delta\}$；

(iii) 有效点映射 $\mathscr{F}$ 在 $\bar{p}$ 是局部 Lipschitz 的.

则有效解映射 $\mathscr{S}$ 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 是类 Lipschitz 的.

证　因为 f 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 严格可微，所以 f 在 $(\bar{p},\bar{x})$ 是 Lipschitz 连续的，故存在 $\bar{x}$ 的邻域 U，$\bar{p}$ 的邻域 W_1 和实数 $l_1>0$ 使得

$$\|f(p',x)-f(p,x)\|\leqslant l_1d(p',p),\ \forall x\in U,\ \forall p',p\in W_1 \tag{16}$$

由条件(iii)，存在 $\bar{p}$ 的邻域 W_2 和实数 $l_2>0$ 使得

$$\mathscr{F}(p')\subset \mathscr{F}(p)+l_2d(p',p)B_Y,\ \forall p',p\in W_2 \tag{17}$$

令 $W:=W_1\cap W_2$，则

$$H(p',x)\subset H(p,x)+(l_1+l_2)d(p',p)B_Y,\ \forall x\in U,\ \forall p',p\in W \tag{18}$$

事实上对任意的 $x\in U$，任意的 $p',p\in W$，任意的 $y\in H(p',x)$，显然 $y\in -f(p',x)+\mathscr{F}(p')$. 结合(17) 式得

$$y\in -f(p',x)+\mathscr{F}(p)+l_2d(p',p)B_Y \tag{19}$$

由(16) 式得

$$f(p', x) \in f(p, x) + l_1 d(p', p) B_Y$$

即

$$-f(p', x) \in -f(p, x) + l_1 d(p', p) B_Y \tag{20}$$

由(19)和(20)式可知

$$y \in -f(p, x) + \mathscr{F}(p) + (l_1 + l_2) d(p', p) B_Y$$

即

$$y \in H(p, x) + (l_1 + l_2) d(p', p) B_Y$$

注意到 $y \in H(p', x)$ 是任意的，故(18)式成立. 综上，定理2的所有条件满足. 由定理2可知定理3成立.

参考文献：

[1] CHUONG T D. Lipschitz-like Property of an Implicit Multifunction and Its Applications [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(17): 6256-6264.

[2] DONTCHEV A L, ROCKAFELLAR R T. Implicit Functions and Solution Mappings [M]. Berlin: Springer New York, 2009.

[3] HUY N Q , KIM D S , NINH K V . Stability of Implicit Multifunctions in Banach Spaces [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2012, 155(2): 558-571.

[4] NGHIA T T A. A Note on Implicit Multifunction Theorems [J]. Optimization Letters, 2014, 8(1): 329-341.

[5] YANG M G, HUANG N J. Random Implicit Function Theorems in Asplund Spaces with Applications [J]. JJournal of Nonlinear and Convex Analysis, 2013, 14(3): 497-517.

[6] YANG M G, XU Y F. Implicit Multifunction Theorems in Banach Spaces [J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014(5): 1-7.

[7] YANG M G, XIAO Y B, HUANG N J. Coderivative Conditions for Calmness of Implicit Multifunctions and Applications [J]. J Nonlinear Convex Anal, 2018, 19(1): 97-113.

[8] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. New York: Wiley, 1983.

[9] MORDUKHOVICH B S. Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications [M]. Berlin: Springer, 2006.

Lipschitz-Like Property of Implicit Multifunctions in Banach Spaces and Applications

XIAO Cheng-ying[1], YANG Ming-ge[2]

1. Key Laboratory of Cloud Computing and Intelligent Information Processing, Sichuan Technology and Business University, Chengdu 611745, China;

2. School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China

Abstract: In this paper, by means of variational analysis and generalized differentiation, we study the stability of implicit multifunctions in Banach spaces, and give sufficient conditions in terms of Clarke coderivative to show that the implicit multifunction is Lipschitz-like at the given point. As applications, we discuss the stability of parametric vector optimization problems, and provide sufficient conditions in terms of Clarke coderivative for guaranteeing the efficient solution map to be Lipschitz-like at the given point. The results obtained in this paper improve the corresponding results in the literature.

Key words: implicit multifunction; stability analysis; parametric vector optimization problem; efficient solution map; Lipschitz-like property

责任编辑　张　枸