第 44 卷　第 7 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2019 年 7 月
Vol. 44　No. 7　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jul.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.07.017

非线性 Black-Scholes 模型下利差期权定价①

韩　婵[1]，　陈东立[2]

1. 西安建筑科技大学 华清学院，西安 710043；2. 西安建筑科技大学 理学院，西安 710043

摘要： 研究了原生资产价格遵循非线性 Black-Scholes 模型时的利差期权定价问题. 利用扰动理论中单参数摄动展开方法，给出了利差期权的近似定价公式. 最后，结合 Feyman-Kac 公式分析了近似定价公式的误差估计问题，结果表明近似解一致收敛于相应期权价格的精确解.

关　键　词： 非线性 Black-Scholes 模型；障碍期权；近似定价公式；误差分析

中图分类号：F830.9；O211.6　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)07-0110-07

利差期权是一种欧式多资产期权[1-10]. 为了更好地描述"波动率微笑现象"，文献[11-14]在波动率及其平方满足 Lipschitz 条件和线性增长条件下研究了非线性 Black-Scholes 模型下的期权定价问题.

相比之下，本文采用摄动方法研究了利差期权定价问题，并采用 Feymann-Kac 公式分析了近似结论的误差估计，结果表明，当波动率及其平方不满足 Lipschitz 条件和线性增长条件时，文献[11-14]中的误差估计结论依然成立.

1　利差期权定价模型

由文献[1,15]可知，利差期权的价格 $C(t, S_1, S_2)$ 适定下面的抛物初值问题

$$\begin{cases}\partial_t C + \Delta C + rS_1\partial_{S_1}C + rS_2\partial_{S_2}C - rC = 0, & (t, S) \in [0, T) \times \mathbb{R}_+ \\ C(T, S) = \max(S_1 - S_2, 0), & S_i \in \mathbb{R}_+, i = 1,2\end{cases} \tag{1}$$

这里 $0 < \varepsilon < 1$，

$$\Delta C = \frac{1}{2}\sigma_{11}(t, S_1, S_2; \varepsilon)S_1^2\partial_{S_1S_1}C + \sigma_{12}(t, S_1, S_2; \varepsilon)S_1S_2\partial_{S_1S_2}C + \frac{1}{2}\sigma_{22}(t, S_1, S_2; \varepsilon)S_1^2\partial_{S_2S_2}C$$

为了便于阐述问题，定义

$$\xi = \frac{S_1}{S_2}, \ u(t, \xi) = \frac{C(t, S_1, S_2)}{S_2} \tag{2}$$

$$\sigma_{11}(t, S_1, S_2; \varepsilon) = \sigma_{11}(t, \xi; \varepsilon), \ \sigma_{22}(t, S_1, S_2; \varepsilon) = \sigma_{22}(t, \xi; \varepsilon), \ \sigma_{12}(t, S_1, S_2; \varepsilon) = \sigma_{12}(t, \xi; \varepsilon)$$

在上述变换之下，可以得到

$$\partial_{S_1}C = S_2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \ \partial_{S_2}C = u + S_2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = u - \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

---

① 收稿日期：2018-09-21

基金项目：贵州省科技厅科学技术基金项目(黔科合 J 字[2015]2076 号)；贵州省教育厅青年科技人才成长项目(黔教合 KY 字[2016]168 号).

作者简介：韩　婵(1985-)，女，讲师，硕士，主要从事数理金融、期权定价的研究.

$$\partial_{S_1S_1}C = \frac{1}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\ \partial_{S_1S_2}C = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = -\frac{\xi}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\partial_{S_2S_2}C = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} - \frac{\xi}{S_2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = \frac{\xi^2}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

代入公式(1)，有

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma(t,\xi;\varepsilon)\xi^2\partial_{\xi\xi}u = 0 \tag{3}$$

其中 $\sigma(t,\xi;\varepsilon) = \sigma_{11}(t,\xi;\varepsilon) + \sigma_{12}(t,\xi;\varepsilon) + \sigma_{22}(t,\xi;\varepsilon)$. 此外在变换(2)之下，终值条件转化为

$$u(T,\xi) = \frac{1}{S_2}C(T,S_1,S_2) = \frac{1}{S_2}\max(S_1 - S_2, 0) = (\xi - 1)^+ \tag{4}$$

为了方便证明，同时定义

$$L_0V = \partial_t V + \frac{1}{2}\sigma_0\partial_{xx}V - \frac{1}{2}\sigma_0\partial_x V \tag{5}$$

$$L_\varepsilon V = \partial_t V + \frac{1}{2}f(t,x;\varepsilon)(\partial_{xx}V - \partial_x V) \tag{6}$$

其中

$$f(t,x;\varepsilon) = \sigma(t,\exp(x);\varepsilon)$$

进一步作变换

$$x = \ln\xi,\ u(t,\xi) = V(t,x) \tag{7}$$

则抛物方程问题(1)变为

$$\begin{cases} L_\varepsilon V = 0,\ (x,t) \in (0,T)\times\mathbb{R} \\ V(T,x) = (\exp(x) - 1)+,\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8}$$

2　摄动方法

下面考察抛物问题(8)的单参数摄动展开，假设 $V(t,x)$ 在 $\varepsilon = 0$ 附近可以幂级数展开

$$V(t,x) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \cdots + \varepsilon^n V_n + \cdots \tag{9}$$

假设当 $\varepsilon = 0$ 时，$f(t,x;\varepsilon)$ 为常数，即 $f(t,x;0) = \sigma_0$，$f(t,x;\varepsilon)$ 可以根据泰勒公式在 $\varepsilon = 0$ 邻域内具备如下形式的幂级数

$$f(t,x;\varepsilon) = f_0(0,0) + \varepsilon f_1(t,x) + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}f_n(t,x) + \cdots \tag{10}$$

其中 $f_n(t,x) = \left.\dfrac{\partial^n f(t,x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0}$. 注意

$$L_\varepsilon V = L_0 V + \frac{1}{2}(f(t,x;\varepsilon) - \sigma_0)(\partial_{xx}V - \partial_x V) \tag{11}$$

从而将公式(9)代入抛物问题(8)，整理之后可以得到

$$\begin{aligned} 0 = &\varepsilon^0 L_0V_0 + \varepsilon\left(L_0V_1 + \frac{1}{2}f_1(t,x)(\partial_{xx}V_0 - \partial_x V_0)\right) + \\ &\varepsilon^2\left(L_0V_2 + \frac{1}{2}f_2(t,x)(\partial_{xx}V_0 - \partial_x V_0) + \frac{1}{2}f_0(t,x)(\partial_{xx}V_1 - \partial_x V_1)\right) + \cdots + \\ &\varepsilon^n\left(L_0V_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f_k(t,x)(\partial_{xx}V_{n-k} - \partial_x V_{n-k})\right) + \cdots \end{aligned}$$

由于 x 和 t 是任意常数，于是有

$$L_0V_0 = 0 \tag{12}$$

$$L_0 V_1 + \frac{1}{2} f_1(t, x)(\partial_{xx} V_0 - \partial_x V_0) = 0 \tag{13}$$

$$L_0 V_n + g_n(t, x) = 0 \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} g_n(t, x) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f_k(t, x)(\partial_{xx} V_{n-k} - \partial_x V_{n-k}) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\partial_{xx} V_k - \partial_x V_k) \frac{1}{(n-k)!} f_{n-k}(t, x) \end{aligned} \tag{15}$$

进一步，根据公式(9)，将抛物方程(8)中初边值条件进行划分

$$V_0(T, x) = (\exp(x) - 1)^+, V_n(T, x) = 0, n = 1,2,\cdots$$

如此，抛物型方程(8)归结为下面一系列常系数抛物方程初边值问题的线性叠加，其中 $V_0(t, x)$ 适合抛物初边值问题

$$\begin{cases} L_0 V_0 = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \\ V_0(T, x) = (\exp(x) - 1)^+ & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{16}$$

$V_n(t, x)$ 为如下偏微分方程初边值的解

$$\begin{cases} L_0 V_n + g_n = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \\ V_n(T, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{17}$$

先处理抛物方程问题(17)，令

$$y = x - \frac{1}{2}\sigma_0(T - t), s = T - t, V(t, x) = U(s, y) \tag{18}$$

有

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial U(s, y)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial U(s, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = - \partial_s U(s, y) + \frac{1}{2}\sigma_0 \partial_y U(s, y)$$

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial U(s, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \partial_y U(s, y), \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U(s, y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \partial_{yy} U(s, y)$$

从而抛物方程问题(17)简化为

$$\begin{cases} \partial_s U = \dfrac{1}{2}\sigma_0 \partial_{yy} U & (s, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \\ U(0, y) = (\exp(y) - 1)^+ & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

由文献[9]可知，$u(s, y)$ 可表示为

$$U(s, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_0 s}} \int_{\mathbb{R}} (\exp(\rho) - 1)^+ \exp\left\{ - \frac{(y - \rho)^2}{2\sigma_0 s} \right\} \mathrm{d}\rho$$

进行多次积分换元，可以得到

$$U(s, y) = \exp\left(y + \frac{1}{2}\sigma_0 s \right) \Phi\left(\frac{y + \sigma_0 s}{\sqrt{\sigma_0 s}} \right) - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma_0 s}} \right) \tag{19}$$

将变换(18)，(17)和(2)依次回代，有

$$C_0(t, S_1, S_2) = S_1 \Phi(a_1) - S_2 \Phi(a_2) \tag{20}$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln S_1 - \ln S_2 + \frac{1}{2}\sigma_0(T - t)}{\sqrt{\sigma_0(T - t)}}, a_2 = \frac{\ln S_1 - \ln S_2 - \frac{1}{2}\sigma_0(T - t)}{\sqrt{\sigma_0(T - t)}}$$

接下来考虑 $V_n(t, x)$. 采用递推法，有如下结论.

引理 1 依据摄动递推方法抛物初边值问题(14)的解 $V_n(t, x)$ 满足

$$V_n(t,x)=\exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sigma_0(T-t)\right)\int_0^{+\infty}\int_t^T\widetilde{g}_n(T-s,x)G_1(x,\xi,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi \tag{21}$$

其中

$$\widetilde{g}_n(\tau,x)=\exp\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sigma_0\tau\right)g_n(T-\tau,x),\ G_1(x,\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0(T-t)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_0(T-t)}\right)$$

证　令

$$V_n(t,x)=\exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sigma_0(T-t)\right)u_n(t,x) \tag{22}$$

再令 $\tau=T-t$，则初值问题(14) 化为

$$\begin{cases}\partial_\tau u_n-\dfrac{1}{2}\sigma_0\partial_{xx}u_n=\widetilde{g}_n(\tau,x) & (\tau,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}\\ u_n(\tau,0)=0 & x\in\mathbb{R}\end{cases} \tag{23}$$

注意当完成 $n-1$ 次递推之后，$g_n(t,x)$ 和 $\widetilde{g}_n(\tau,x)$ 是明确已知的，根据文献[9]，抛物问题(23) 的解可表示为

$$u_n(t,x)=\int_0^{+\infty}\int_t^T\widetilde{g}_n(T-s,x)G_1(x,\xi,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi$$

考虑(22) 式的逆变换，即可得结论成立. 证毕.

综合引理 1 和式(20)，有如下结论成立.

定理 1　利差期权的定价公式 $P(t,S)$ 有如下半解析形式

$$C(t,S_1,S_2)=C_0(t,S_1,S_2)+\varepsilon C_1(t,S_1,S_2)+\cdots+\varepsilon^n C_n(t,S_1,S_2)+\cdots$$

其中 $C_0(t,S_1,S_2)$ 见式(19)，$C_n(t,S_1,S_2)=S_2V_n\left(t,\dfrac{S_1}{S_2}\right)$，$V_n(t,x)$ 见式(21).

3　误差估计

将 $f(t,x;\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 处进行幂级数展开，从而对任意的 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+$ 有

$$\left|f(t,x;\varepsilon)-\sum_{i=0}^{n}\frac{\varepsilon^i}{i!}f_i(t,x)\right|\leqslant\frac{M_0}{(n+1)!}\varepsilon^{n+1} \tag{24}$$

本节假设 M_0 是非负常数，并在此假设下，考察近似结论(定理 1) 的误差估计.

引理 2[14]　设 ε 为常数，$\varepsilon\in(0,1)$，则对任意的 $x\in\mathbb{R}_+$，有

$$|\exp(-\varepsilon\ln x)-1|\leqslant\varepsilon\max\{\ln x,x^{-1}\}$$

引理 3　设 ε 为常数，$\varepsilon\in(0,1)$，则对任意的 $x\in\mathbb{R}_+$，有

$$\partial_{xx}V_0(t,x)-\partial_xV_0(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_0(T-t)}}\exp(x)n(b_1)$$

证　由式(19)，可以得到 $V_0(t,x)=\exp(x)\Phi(b_1)-\Phi(b_2)$，其中

$$b_1=\frac{x+\frac{1}{2}\sigma_0(T-t)}{\sqrt{\sigma_0(T-t)}},\ b_2=\frac{x-\frac{1}{2}\sigma_0(T-t)}{\sqrt{\sigma_0(T-t)}}$$

从而

$$\partial_xV_0(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_0(T-t)}}n(b_1)+\exp(x)\Phi(b_1)-\frac{1}{\sqrt{\sigma_0(T-t)}}n(b_2)$$

显然标准正态分布的密度函数 $n(\cdot)$ 满足 $n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. 容易验证 $n(a_2)=\exp(x)n(a_1)$，从而

$$\partial_xV_0(t,x)=\exp(x)\Phi(b_1) \tag{25}$$

进一步，有

$$\partial_{xx}V_0(t, x) = \exp(x)\Phi(a_2) + \frac{1}{\sqrt{\sigma_0(T-t)}}\exp(x)n(b_1) \tag{26}$$

联立式(25)和式(26)，可以得到

$$\partial_{xx}V_0(t, x) - \partial_x V_0(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0(T-t)}}\exp(x)n(b_1)$$

证毕

定理 2 设 ε 为足够小的正常数，则存在不依赖时间 t 的正常数 M，使得

$$|C(t, S_1, S_2) - C_0(t, S_1, S_2)| \leqslant M\varepsilon$$

证 由变换(2)和变换(7)易知，只需证明

$$|V(t, x) - V_0(t, x)| \leqslant M\varepsilon$$

成立. 令 $E_0(t, x) = V_0(t, x) - V(t, x)$，则

$$E_0(T, x) = 0 \tag{27}$$

考虑到 $L_\varepsilon V(t, x) = 0$，从而由式(5)可得

$$L_\varepsilon E_0(t, x) = \frac{1}{2}[f(t, x; \varepsilon) - \sigma_0](\partial_{xx}V_0 - \partial_x V_0) \tag{28}$$

故将式(28)代入式(27)，可以得到

$$\begin{cases} L_\varepsilon E_0 = h_1(t, x) & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \\ E_0(T, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{29}$$

其中 $h_1(t, x) = \dfrac{1}{2}[f(t, x; \varepsilon) - \sigma_0](\partial_{xx}V_0 - \partial_x V_0)$.

另一方面利用 Feynman-Kac 公式[16]，抛物初边值问题(29)满足

$$\bar{E}_0(t, x) = E^{Q, x}\left[\int_t^T h_1(t, \ln X_t)\mathrm{d}\tau\right] \tag{30}$$

其中 $\exp(-r(T-t))X_t$ 为 L^∞ 鞅，注意 $n(d_1) \leqslant \sqrt{2\pi}$，从而

$$\bar{E}_0(t, x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E^{Q, x}\left[\int_t^T \frac{1}{\sqrt{T-\tau}}X_\tau(\exp(-\varepsilon\ln X_\tau) - 1)\mathrm{d}\tau\right]$$

利用引理 1，有

$$\begin{aligned}\bar{E}_0(t, x) &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E^{Q, x}\left[\int_t^T \frac{1}{\sqrt{T-\tau}}X_\tau\varepsilon\max\{\ln X_\tau, X_\tau^{-1}\}\mathrm{d}\tau\right] \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E^{Q, x}\left[\int_t^T \frac{1}{\sqrt{T-\tau}}\varepsilon\max\{X_\tau^2, 1\}\mathrm{d}\tau\right]\end{aligned}$$

注意瑕积分 $\int_0^T (T-\tau)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau$ 是收敛的，因此定义 $X_T^* = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant T} X_\tau^2$，上式变成

$$\bar{E}_0(t, x) \leqslant \varepsilon M_1(E^{Q, x}[(X_T^*)^2] + 1)$$

考虑到 $\exp(-r(T-t))X_t$ 是鞅，易见 $|X_t|$ 是下鞅，从而由 Doob 不等式，可得

$$\bar{E}_0(t, x) \leqslant \varepsilon M_1(E^{Q, x}[X_T^2] + 1)$$

证毕

定理 3 对任意的正整数 n 存在正常数 M 不依赖 n 和 t，使得

$$\left|C(t, S_1, S_2) - \sum_{i=0}^{i=n}\varepsilon^i C_i(t, S_1, S_2)\right| \leqslant M\varepsilon^{n+1}$$

证 类推定理 2 的证明过程，只需证明 $|E_n(t, x)| \leqslant M\varepsilon^{n+1}$，其中

$$E_n(t,x)=V^n(t,x)-V(t,x),\ V^n(t,x)=\sum_{i=0}^{i=n}\varepsilon^i V_i(t,x)$$

注意 $E_n(t,x)$ 满足初边值条件 $E_n(t,0)=0$，$E_n(T,x)=0$，并且

$$L_\varepsilon E_n(t,x)=L_0V^n+\frac{1}{2}[f(t,x;\varepsilon)-\sigma_0](\partial_{xx}V^n-\partial_xV^n)=h_n(x,t)$$

这里

$$h_n(x,t)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{(i-k)!}f_{i-k}(t,x)(\partial_{xx}V_k-\partial_xV_k)+\frac{1}{2}[f^{d.o}(t,x;\varepsilon)-\sigma_0](\partial_{xx}V^n-\partial_xV^n)$$

从而

$$\begin{cases}L_\varepsilon E_n(t,x)=h_n(x,t) & (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}\\ E_n(T,x)=0 & x\in\mathbb{R}\end{cases}\tag{31}$$

一方面，类似文献[14]之推导过程，$h_n(x,t)$ 满足

$$h_n(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k\mathbb{R}_k(t,x)\left[f(t,x;\varepsilon)-\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{i!}f_i(t,x)\right]$$

利用式(24)，对任意的 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$，有

$$\left|f^{d.o}(t,x;\varepsilon)-\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}f_i(t,x)\right|\leqslant\frac{M_0}{(k+1)!}\varepsilon^{k+1}\tag{32}$$

另一方面，利用 Feynman-Kac 公式[16] 可知，

$$E_n(t,x)=E^{Q,x}\left[\int_t^{\tau_x}\sum_{k=0}^{n-1}h_n(\tau,\ln X_\tau)\mathrm{d}\tau\right]\tag{33}$$

因此令 $M=\sup\limits_{k,t,x}\mathbb{R}_k(t,x)$，并联立式(32)和式(33)，

$$|E_n(t,x)|\leqslant\frac{1}{2}M_0M\varepsilon^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k+1)!}\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{e}M_0M\varepsilon^{n+1}$$

定理得证.

由定理 3 可以看出，$\sum\limits_{i=0}^{i=n}\varepsilon^iC_i(t,S_1,S_2)$ 在定解区域 $[0,T]\times\mathbb{R}_+$ 上一致收敛到 $C(t,S_1,S_2)$. 此外，定理 2 和定理 3 的证明并不要求抛物方程(1)的初值条件是光滑的.

参考文献：

[1] 孙玉东，师义民，谭　伟. 带跳混合分数布朗运动下利差期权定价 [J]. 系统科学与数学，2012，32(11)：1377-1385.

[2] 傅　毅，张寄洲. 随机利率下的利差期权定价公式 [J]. 上海师范大学学报(自然科学版)，2007，36(4)：11-15.

[3] 梁义娟，徐承龙，马俊美. 多因子欧式期权定价的主成分蒙特卡罗加速方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(1)：88-97.

[4] 甘小艇. 有限体积法定价欧式跳扩散期权模型 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(11)：1-7.

[5] 潘　坚，肖庆宪. 基于随机违约和利率双重风险的可转换债券的定价 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(7)：138-145.

[6] 赵　攀. 马尔科夫转换模型下的套期保值策略研究 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2017，35(5)：50-55.

[7] 胡　攀. 模糊环境下非对称双头垄断期权博弈模型 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2017，35(1)：57-62.

[8] 房冬冬，王传玉，孙惠玲. 随机通货膨胀率下 DB 养老金计划中指数化调整期权的价值 [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2016，33(3)：60-65.

[9] BELIAEVA N，NAWALKHA S. Pricing AmericanInterest Rate Options under the Jump-Extended Constant-Elasticity-of-Variance Short Rate Models [J]. Journal of Banking & Finance，2012，36(1)：151-163.

[10] XU M，KNESSL C. On a Free Boundary Problem for an American Put Option under the CEV Process [J]. Applied

Mathematics Letters, 2011, 24(7): 1191-1198.
[11] 孙玉东, 师义民, 童 红. 基于摄动理论的障碍期权定价[J]. 应用数学学报, 2015, 38(1): 67-79.
[12] 孙玉东, 王秀芬, 童 红. 非线性Black-Scholes模型下障碍期权定[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(4): 513-527.
[13] 董 艳. 非线性Black-Scholes模型下Bala期权定价[J]. 高校应用数学学报A辑, 2016, 31(1): 9-20.
[14] 孙玉东, 师义民, 童 红. 非线性Black-Scholes模型下阶梯期权定价[J]. 高校应用数学学报A辑, 2016, 31(3): 262-272.
[15] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2008: 220-221.
[16] 金治明. 随机分析基础及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.

Performance Options' Pricing Under Nonlinear Black-Scholes Model

HAN Chan[1], CHEN Dong-li[2]

1. Huaqing College, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710043, China;
2. School of Science, Xi'an University of Architecture and Technologe, Xi'an 710043, China

Abstract: In this text, the pricing problems of performance options are discussed under the condition that the price of underlying asset follows the nonlinear Black-Scholes model. The author uses the perturbation method of single-parameter to obtain asymptomatic formulae of performance options pricing problems. Finally, error estimates of these asymptotic solutions are illustrated by using the Feymann-Kac formula in which the results indicate that the asymptotic solutions uniformly converges to its exact solutions.

Key words: nonlinear Black-Scholes model; barrier options; asymptomatic pricing formulae; error estimates

责任编辑 张 枸