DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.08.001

四元数矩阵方程 $AXB+CXD=E$ 的 M 自共轭解①

蓝家新, 黄敬频, 王 敏, 毛利影

广西民族大学 理学院,南宁 530006

摘要: 把实数域上的 M 对称矩阵的概念推广到四元数体上,形成 M 自共轭矩阵,然后在四元数体上讨论矩阵方程 $AXB+CXD=E$ 的 M 自共轭解及其最佳逼近问题. 利用四元数矩阵的实分解和复分解,以及 M 自共轭矩阵的特征结构,借助 Kronecker 积把约束四元数矩阵方程转化为实数域上的无约束方程,克服了四元数乘法非交换运算的困难,并得到该方程具有 M 自共轭解的充要条件及其通解表达式. 同时在解集非空的条件下,运用矩阵的分块技术及矩阵的拉直算子,获得与预先给定的四元数矩阵有极小 Frobenius 范数的最佳逼近解. 由于 M 自共轭矩阵是四元数自共轭矩阵的推广,因此所得结果拓展了该方程的结构解类型.

关 键 词: 四元数体;矩阵方程;M 自共轭矩阵;Kronecker 积;最佳逼近

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)08-0001-06

矩阵方程 $AXB+CXD=E$ 有广泛的实际应用背景,许多学者在实数域或复数域上给出过该方程的不同求解方法,例如共轭梯度法、迭代法等[1-3]. 而在四元数体上,由于元素乘积不可换,导致上述方法失效. 文献[4]在四元数体上讨论了该方程的 Hermitian 解,文献[5]在四元数体上给出了该方程的 3 类特殊最小二乘解,同时文献[6-7]在四元数体上论讨了 Lyapunov 方程的循环解及反问题解.

本文的目的是在四元数体上讨论方程

$$AXB+CXD=E \tag{1}$$

具有 M 自共轭解及其最佳逼近问题,其中 $A,C\in Q^{m\times n}$, $B,D\in Q^{n\times l}$, $E\in Q^{m\times l}$, $M\in Q^{n\times m}$ 是已知矩阵, $X\in Q^{n\times n}$ 是未知矩阵.

随着矩阵应用领域的扩大,各种结构的矩阵不断被提出[8-10]. 例如,实数域上 M 对称矩阵的概念最早由文献[10]所提出,即给定 $M\in R^{n\times m}$,若矩阵 $X\in R^{n\times n}$,满足 $(M^{\mathrm{T}}XM)^{\mathrm{T}}=M^{\mathrm{T}}XM$,则称矩阵 X 为 M 的对称矩阵. 与此同时,文献[10]解决了矩阵方程 $A^{\mathrm{T}}XA=B$ 的 M 对称解及 M 对称最小二乘问题. 在此,我们把实数域上 M 对称矩阵的概念推广到四元数体,给出 M 自共轭矩阵的定义.

定义 1 设矩阵 $M\in Q^{n\times m}$,若矩阵 $X\in Q^{n\times n}$,满足 $(M^{*}XM)^{*}=M^{*}XM$,则称矩阵 X 为 M 自共轭矩阵. 显然,M 自共轭矩阵是实数域上 M 对称矩阵的推广.

用 $SC_n(Q)$($ASC_n(Q)$)分别表示全体 n 阶四元数自共轭(反自共轭)矩阵集合,U 表示四元数酉矩阵,$\mathrm{vec}(A)$ 表示矩阵 A 按列顺序拉直向量,A^{+} 表示 A 的 Moore-Penrose 广义逆,$A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积.

定义 2 设 $A=(a_{ij})\in SC_n(Q)$, $B=(b_{ij})\in ASC_n(Q)$,记

$$\boldsymbol{a}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}),\ \boldsymbol{a}_2=(a_{22},a_{32},\cdots,a_{n2}),\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{n-1}=(a_{(n-1)(n-1)},a_{n(n-1)}),\ \boldsymbol{a}_n=(a_{nn})$$

$$\boldsymbol{b}_1=(b_{21},b_{31},\cdots,b_{n1}),\ \boldsymbol{b}_2=(b_{32},b_{42},\cdots,b_{n2}),\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_{n-2}=(b_{(n-1)(n-2)},b_{n(n-2)}),\ \boldsymbol{b}_{n-1}=(b_{n(n-1)})$$

---

① 收稿日期:2018-11-12

基金项目:国家自然科学基金项目(11661011);广西民族大学研究生创新项目(gxun-chxzs2017142,gxun-chxps201813).

作者简介:蓝家新(1994-),男,硕士研究生,主要从事矩阵计算的研究.

通信作者:黄敬频(1964-),男,教授.

则称向量

$$\mathrm{vec}_s(\boldsymbol{A}) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)^{\mathrm{T}} \in Q^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad \mathrm{vec}_a(\boldsymbol{B}) = (b_1, b_2, \cdots, b_{n-2}, b_{n-1})^{\mathrm{T}} \in Q^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{2}$$

分别是自共轭矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与反自共轭矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的拉直向量.

引理 1 设 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{bmatrix} \in Q^{n\times n}$，其中 $\boldsymbol{X}_1 \in Q^{r\times r}$，$\boldsymbol{X}_2 \in Q^{r\times(n-r)}$，$\boldsymbol{X}_3 \in Q^{(n-r)\times r}$，$\boldsymbol{X}_4 \in Q^{(n-r)\times(n-r)}$，则存在矩阵 $\boldsymbol{P} \in R^{n^2\times n^2}$，使得

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P} \cdot [\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_1), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_3), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_2), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_4)]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{e}_n & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \in R^{nr\times nr}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{e}_n & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \in R^{n(n-r)\times n(n-r)}$$

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2] \in R^{n^2\times n^2} \tag{4}$$

$\boldsymbol{e}_i$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 i 列. 本文具体讨论如下两个问题:

问题 1 给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C} \in Q^{m\times n}$，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{D} \in Q^{n\times l}$，$\boldsymbol{E} \in Q^{m\times l}$，$\boldsymbol{M} \in Q^{n\times m}$，求 $\boldsymbol{M}$ 自共轭矩阵 $\boldsymbol{X} \in Q^{n\times n}$，使得 $\boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{CXD} = \boldsymbol{E}$. 若此问题无解，即它的解集 $S_E = \varnothing$，求 $\boldsymbol{M}$ 自共轭矩阵 $\boldsymbol{X} \in Q^{n\times n}$，使得 $\|\boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{CXD} - \boldsymbol{E}\| = \min$.

问题 2 设问题 1 的解集 $S_E \neq \varnothing$，$\boldsymbol{N} \in Q^{n\times n}$ 是已知四元数矩阵，求矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}} \in S_E$，使得 $\min\limits_{X\in S_E} \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{N}\| = \|\widetilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{N}\|$.

1 问题 1 的解

首先，对给定的矩阵 $\boldsymbol{M} \in Q^{n\times m}$，设 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = r$，并对 $\boldsymbol{M}$ 作奇异值分解(SVD):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^* \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r) > 0$，$\boldsymbol{V} \in U^{m\times m}$，$\boldsymbol{U} \in U^{n\times n}$.

定理 1 矩阵 $\boldsymbol{X} \in Q^{n\times n}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 自共轭矩阵的充分必要条件为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^* \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{X}_1 \in SC_r(Q)$，$\boldsymbol{X}_2 \in Q^{r\times(n-r)}$，$\boldsymbol{X}_3 \in Q^{(n-r)\times r}$，$\boldsymbol{X}_4 \in Q^{(n-r)\times(n-r)}$ 为任意四元数矩阵.

证 必要性 由 $\boldsymbol{M}$ 的奇异值分解(5)得 $\boldsymbol{\Sigma} > 0$，$\boldsymbol{V} \in U^{m\times m}$，$\boldsymbol{U} \in U^{n\times n}$，令

$$\boldsymbol{U}^* \boldsymbol{XU} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 自共轭矩阵，则 $(\boldsymbol{M}^* \boldsymbol{XM})^* = \boldsymbol{M}^* \boldsymbol{XM}$，代入(5)式，化简得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma X}_1 \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma X}_1^* \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1^*$，于是(6)式成立.

充分性 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的表达式如(6)式所示，直接计算可得 $(\boldsymbol{M}^* \boldsymbol{XM})^* = \boldsymbol{M}^* \boldsymbol{XM}$，因此 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 自共轭矩阵.

根据定理 1，四元数矩阵方程(1)等价于

$$\boldsymbol{AU} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^* \boldsymbol{B} + \boldsymbol{CU} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^* \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{X}_1 \in SC_r(Q)$．记

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2 j \qquad \boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{21}\\ \boldsymbol{X}_{31} & \boldsymbol{X}_{41}\end{bmatrix}\in C^{n\times n} \qquad \boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{12} & \boldsymbol{X}_{22}\\ \boldsymbol{X}_{32} & \boldsymbol{X}_{42}\end{bmatrix}\in C^{n\times n}$$

并设四元数矩阵 $\boldsymbol{AU},\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B},\boldsymbol{CU},\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_4$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的分解式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2 j,\ \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2 j,\ \boldsymbol{CU}=\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2 j,\ \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2 j,\ \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2 j\\ \boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{X}_{12} j,\ \boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{X}_{31}+\boldsymbol{X}_{32} j,\ \boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_{21}+\boldsymbol{X}_{22} j,\ \boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{X}_{41}+\boldsymbol{X}_{42} j\end{cases} \tag{8}$$

因此，四元数矩阵方程(7)等价于

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2 j)(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2 j)(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2 j)+(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2 j)(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2 j)(\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2 j)=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2 j \tag{9}$$

将(9)式左边展开，并根据四元数矩阵复分解的唯一性，可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_1\bar{\boldsymbol{B}}_2-\boldsymbol{C}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_1\bar{\boldsymbol{D}}_2-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_2\bar{\boldsymbol{B}}_2-\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_2\bar{\boldsymbol{D}}_2-\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{C}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_1\bar{\boldsymbol{B}}_1+\boldsymbol{C}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_1\bar{\boldsymbol{D}}_1+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_2\bar{\boldsymbol{B}}_1+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_2\bar{\boldsymbol{D}}_1-\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{C}_2\bar{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{E}_2\end{cases} \tag{10}$$

记

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_1 & -\bar{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_2-\bar{\boldsymbol{D}}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_2 & -\bar{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_1-\bar{\boldsymbol{D}}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_1 & -\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_1 & \bar{\boldsymbol{B}}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_2+\bar{\boldsymbol{D}}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_2 & \bar{\boldsymbol{B}}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_1+\bar{\boldsymbol{D}}_1^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_1 & -\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}$$

则复矩阵方程(10)等价于

$$\boldsymbol{G}\cdot(\mathrm{vec}\,(\boldsymbol{Y}_1)^{\mathrm{T}},\ \mathrm{vec}\,(\bar{\boldsymbol{Y}}_1)^{\mathrm{T}},\ \mathrm{vec}\,(\boldsymbol{Y}_2)^{\mathrm{T}},\ \mathrm{vec}\,(\bar{\boldsymbol{Y}}_2)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\mathrm{vec}\,(\boldsymbol{E}_1)^{\mathrm{T}},\ \mathrm{vec}\,(\boldsymbol{E}_2)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

利用引理 1，可得 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}_1)=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{l}_1$，$\mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{Y}}_1)=\boldsymbol{P}\cdot\bar{\boldsymbol{l}}_1$，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}_2)=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{l}_2$，$\mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{Y}}_2)=\boldsymbol{P}\cdot\bar{\boldsymbol{l}}_2$，其中 $\boldsymbol{P}$ 如(4)式所示，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}_1&=[\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{11}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{31}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{21}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{41})]^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{l}}_1&=[\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{11}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{31}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{21}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{41})]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{l}_2&=[\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{12}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{32}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{22}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_{42})]^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{l}}_2&=[\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{12}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{32}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{22}),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{42})]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

因此

$$[\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_1),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{Y}}_1),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_2),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{Y}}_2)]^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P}]\cdot[\boldsymbol{l}_1^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{l}}_1^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{l}}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

由于 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{X}_{12}j\in SC_r(Q)$，因此由文献[11]的引理 2.5 及引理 2.6 可得

$$\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{11})\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{12})\\ \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{X}}_{11})\\ \mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{X}}_{12})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_s & i\boldsymbol{K}_a & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_a & i\boldsymbol{K}_a\\ \boldsymbol{K}_s & -i\boldsymbol{K}_a & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_a & -i\boldsymbol{K}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{vec}_s(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{11}))\\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{11}))\\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{12}))\\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{12}))\end{bmatrix}$$

记

$$\boldsymbol{W}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_s & i\boldsymbol{K}_a\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_s & -i\boldsymbol{K}_a\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{W}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_a & i\boldsymbol{K}_a\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_a & -i\boldsymbol{K}_a\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{W}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & i\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & -i\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1 & & & & & & & \\ & & \boldsymbol{W}_3 & & & & & \\ & \boldsymbol{W}_2 & & & \boldsymbol{W}_3 & & & \\ & & & \boldsymbol{W}_3 & & & \boldsymbol{W}_3 & \\ & & & & & \boldsymbol{W}_3 & & \\ & & & & & & & \boldsymbol{W}_3\end{bmatrix}\in R^{4n^2\times(4n^2-2r^2-r)}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}=[&\mathrm{vec}_s^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{11})),\ \mathrm{vec}_a^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{11})),\ \mathrm{vec}_a^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{12})),\ \mathrm{vec}_a^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{12})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{31})),\\ &\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{31})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{32})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{32})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{21})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{21})),\\ &\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{22})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{22})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{41})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{41})),\ \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_{42})),\\ &\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_{42}))]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{diag}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}] \cdot \boldsymbol{W} \qquad \boldsymbol{L} = [\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_1), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_2)]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 是相应阶数的单位矩阵，$\boldsymbol{K}_s$，$\boldsymbol{K}_a$ 是形如文献[11]引理 2.5 中相应阶数的矩阵. 因此方程组(11)等价于

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{v} \in R^{(4n^2-2r^2-r)\times 1}$. 设 $\widetilde{\boldsymbol{G}}$，$\boldsymbol{L}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上的分解式为 $\widetilde{\boldsymbol{G}} = \widetilde{\boldsymbol{G}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{G}}_1 i$，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 + \boldsymbol{L}_1 i$，并记

$$\hat{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{G}}_0 \\ \widetilde{\boldsymbol{G}}_1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_0 \\ \boldsymbol{L}_1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

则方程组(14)等价于

$$\hat{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{L}} \tag{16}$$

此外，利用四元数矩阵 Frobenius 范数及方程组(10)可得

$$\begin{aligned} &\| \boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{CXD} - \boldsymbol{E} \|^2 = \\ &\| \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_1\overline{\boldsymbol{B}}_2 - \boldsymbol{C}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_1\overline{\boldsymbol{D}}_2 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_2\overline{\boldsymbol{B}}_2 - \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_2\overline{\boldsymbol{D}}_2 - \boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{C}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{E}_1 \|^2 + \\ &\| \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_1\overline{\boldsymbol{B}}_1 + \boldsymbol{C}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_1\overline{\boldsymbol{D}}_1 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_2\overline{\boldsymbol{B}}_1 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_2\overline{\boldsymbol{D}}_1 - \boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{C}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_2\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{E}_2 \|^2 = \\ &\| \hat{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{L}} \|^2 \end{aligned} \tag{17}$$

因此，关于问题 1 的 $\boldsymbol{M}$ 自共轭矩阵解问题，我们有：

定理 2 给定 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \in Q^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D} \in Q^{n\times l}$，$\boldsymbol{E} \in Q^{m\times l}$，$\boldsymbol{M} \in Q^{n\times m}$，则四元数矩阵方程(1)存在 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解的充要条件是 $\hat{\boldsymbol{G}}\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}$. 有解时，它的一般解为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{11}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{21}(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{X}_{31}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{41}(\boldsymbol{v}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{12}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{22}(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{X}_{32}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{42}(\boldsymbol{v}) \end{bmatrix} j \tag{18}$$

无解时，它的最小二乘 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解仍为(18)，其中

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} + (\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})\boldsymbol{Y} \qquad \forall \boldsymbol{Y} \in R^{(4n^2-2r^2-r)\times 1}$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{11}) = \boldsymbol{K}_s \cdot \boldsymbol{v}\left(1:\frac{r(r+1)}{2}\right) + i\boldsymbol{K}_a \cdot \boldsymbol{v}\left(\frac{r(r+1)}{2}+1:r^2\right)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{12}) = \boldsymbol{K}_a \cdot \boldsymbol{v}\left(r^2+1:\frac{3r^2-r}{2}\right) + i\boldsymbol{K}_a \cdot \boldsymbol{v}\left(\frac{3r^2-r}{2}+1:2r^2-r\right)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{31}) = \boldsymbol{v}(2r^2-r+1:nr+r^2-r) + i\boldsymbol{v}(nr+r^2-r+1:2nr-r)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{32}) = \boldsymbol{v}(2nr-r+1:3nr-r^2-r) + i\boldsymbol{v}(3nr-r^2-r+1:4nr-2r^2-r)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{21}) = \boldsymbol{v}(4nr-2r^2-r+1:5nr-3r^2-r) + i\boldsymbol{v}(5nr-3r^2-r+1:6nr-4r^2-r)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{22}) = \boldsymbol{v}(6nr-4r^2-r+1:7nr-5r^2-r) + i\boldsymbol{v}(7nr-5r^2-r+1:8nr-6r^2-r)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{41}) = \boldsymbol{v}(8nr-6r^2-r+1:n^2+6nr-5r^2-r) + i\boldsymbol{v}(n^2+6nr-5r^2-r+1:2n^2+4nr-4r^2-r)$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{42}) = \boldsymbol{v}(2n^2+4nr-4r^2-r+1:3n^2+2nr-3r^2-r) + i\boldsymbol{v}(3n^2+2nr-3r^2-r+1:4n^2-2r^2-r)$$

这里 $\hat{\boldsymbol{G}} \in R^{4ml\times(4n^2-2r^2-r)}$，$\hat{\boldsymbol{L}} \in R^{4ml\times 1}$ 如(15)式所示，$v\left(1:\frac{r(r+1)}{2}\right)$ 表示由向量 $\boldsymbol{v}$ 的第 1 至 $\frac{r(r+1)}{2}$ 个元素组成的 $\frac{r(r+1)}{2}$ 维列向量.

证 由方程组(16)、引理 1 及文献[12]的引理 2 可知，四元数矩阵方程(1)存在 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解 $\Leftrightarrow$ 方程组(16)有解 $\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{G}}\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}$. 有解时，矩阵方程(1)的 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解显然由(18)式给出. 无解时，由(17)式可得 $\| \boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{CXD} - \boldsymbol{E} \| = \min \Leftrightarrow \| \hat{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{L}} \| = \min$，因此，矩阵方程(1)的最小二乘 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解仍为(18).

2 问题 2 的解

设问题 1 的解集 $S_E \neq \varnothing$，$\boldsymbol{N} \in Q^{n\times n}$ 是已知的四元数矩阵，现将 $\boldsymbol{N}$ 分块

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 \\ \boldsymbol{N}_3 & \boldsymbol{N}_4 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{N}_1 \in Q^{r\times r}$，$\boldsymbol{N}_3 \in Q^{(n-r)\times r}$，$\boldsymbol{N}_2 \in Q^{r\times(n-r)}$，$\boldsymbol{N}_4 \in Q^{(n-r)\times(n-r)}$．再对 $\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_4$ 作复分解，得

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}j \qquad \boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{N}_{31} + \boldsymbol{N}_{32}j \qquad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{N}_{21} + \boldsymbol{N}_{22}j \qquad \boldsymbol{N}_4 = \boldsymbol{N}_{41} + \boldsymbol{N}_{42}j \tag{19}$$

记

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{W}} = \mathrm{diag}[(\boldsymbol{K}_s, i\boldsymbol{K}_a), (\boldsymbol{K}_a, i\boldsymbol{K}_a), (\boldsymbol{I}, i\boldsymbol{I}), (\boldsymbol{I}, i\boldsymbol{I}), (\boldsymbol{I}, i\boldsymbol{I}), (\boldsymbol{I}, i\boldsymbol{I}), (\boldsymbol{I}, i\boldsymbol{I}), (\boldsymbol{I}, i\boldsymbol{I})] \in C^{2n^2\times(4n^2-2r^2-r)} \\ \hat{\boldsymbol{n}} = [\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{11}), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{12}), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{31}), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{32}), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{21}), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{22}), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{41}), \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_{42})]^{\mathrm{T}} \in C^{2n^2\times 1} \end{cases} \tag{20}$$

当 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{bmatrix} \in S_E$ 时，根据定理 2，以及(8),(19),(20) 式，得

$$\begin{aligned} &\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} \|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{21} \\ \boldsymbol{X}_{31} & \boldsymbol{X}_{41} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{21} \\ \boldsymbol{N}_{31} & \boldsymbol{N}_{41} \end{bmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{12} & \boldsymbol{X}_{22} \\ \boldsymbol{X}_{32} & \boldsymbol{X}_{42} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{12} & \boldsymbol{N}_{22} \\ \boldsymbol{N}_{32} & \boldsymbol{N}_{42} \end{bmatrix} \right\|^2 = \\ &\sum_{i=1}^{4} \| \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{i1}) - \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_{i1}) \|^2 + \sum_{j=1}^{4} \| \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{j2}) - \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_{j2}) \|^2 = \\ &\| \hat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{n}} \|^2 = \| \hat{\boldsymbol{W}}\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})\boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{n}} \|^2 \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 如(13) 式所示．因此，关于问题 2 的解，我们有如下结果：

定理 3 设问题 1 的解集 $S_E \neq \varnothing$，$\boldsymbol{N} \in Q^{n\times n}$ 是已知的四元数矩阵，则在 S_E 中存在 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$，使得 $\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{M} \| = \min$，且 $\widetilde{X}$ 有如下表达式

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{11}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{21}(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{X}_{31}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{41}(\boldsymbol{v}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{12}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{22}(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{X}_{32}(\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{X}_{42}(\boldsymbol{v}) \end{bmatrix} j \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} + (\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})[\hat{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})]^{+}(\hat{\boldsymbol{n}} - \hat{\boldsymbol{W}}\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}})$，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{ij})(i = 1,2,3,4,\ j = 1,2)$ 与定理 2 的取法相同.

证 当 $\boldsymbol{X} \in S_E$ 时，根据定理 2 及(21) 式，有

$$\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} \|^2 = \min \Leftrightarrow \| \hat{\boldsymbol{W}}\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})\boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{n}} \|^2 = \min \tag{23}$$

根据文献[12] 的引理 2 可知，当 $\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}} \neq \boldsymbol{I}$ 时，(23) 式关于 $\boldsymbol{Y}$ 的最小二乘解为

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}} = [\hat{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})]^{+}(\hat{\boldsymbol{n}} - \hat{\boldsymbol{W}}\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}})$$

当 $\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{I}$ 时，方程(1) 存在 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解 $\tilde{\boldsymbol{v}} = \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\boldsymbol{L}$. 因此，不论哪种情况，均有

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} + (\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})\widetilde{\boldsymbol{Y}} = \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}} + (\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})[\hat{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{G}})]^{+}(\hat{\boldsymbol{n}} - \hat{\boldsymbol{W}}\hat{\boldsymbol{G}}^{+}\hat{\boldsymbol{L}})$$

于是，存在 $\widetilde{\boldsymbol{X}} \in S_E$，使得 $\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{N} \| = \min$ 成立，并且 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 由(22) 式给出.

3 结　　语

本文提出并讨论了四元数矩阵方程(1) 具有 $\boldsymbol{M}$ 自共轭结构解的问题. 本文的研究拓展了所引相关文献的结果. 在处理方法上，主要利用四元数矩阵的复分解与实分解，解决四元数乘法非交换限制，并采用 $\boldsymbol{M}$ 自共轭矩阵的向量化刻划，实现方程的无约束转化，从而得到问题 1 具有 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解的充要条件及其通解表达式. 当问题 1 的解集 $S_E \neq \varnothing$ 时，根据 F 范数的性质及无约束方程，得到了问题 2 的最佳逼近解.

参考文献：

[1] 张凯院，袁　飞. 求一般线性矩阵方程对称解的修正共轭梯度法 [J]. 高等学校计算数学学报，2011，33(3)：215-224.

[2] PENG Z Y, PENG Y X. An Efficient Iterative Method for Solving the Matrix Equation $AXB+CYD=E$ [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2006, 13(6): 473-485.

[3] 周海林. 线性子空间上求解矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 的迭代算法 [J]. 应用数学学报，2016，39(4)：610-619.

[4] YUAN S F, WANG Q W. Two Special Kinds of Least Squares Solutions for the Quaternion Matrix Equation $AXB+CXD=E$ [J]. Electronic Journal of Linear Algebra Ela, 2012, 23(1): 257-274.

[5] ZHANG F X, MU W S, LI Y. Special Least Squares Solutions of the Quaternion Matrix Equation $AXB+CXD=E$ [J].

Computers & Mathematics with Applications, 2016, 72(5): 1426-1435.
[6] 黄敬频,陆云双,许克佶. 四元数体上统一代数 Lyapunov 方程的循环解及最佳逼近 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 1-5.
[7] 邓 勇,黄敬频. 四元数体上离散型 Lyapunov 方程的反问题解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(7): 1-6.
[8] 刘海峰,卢开毅,梁星亮. $GF(2^8)$上高矩阵为密钥矩阵的 Hill 加密衍生算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(11): 41-47.
[9] 谭伟杰,冯西安,张杨梅. 基于 Hankel 矩阵分解的互素阵列高分辨目标定向 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(7): 191-198.
[10] 彭向阳,胡锡炎,张 磊. 矩阵方程的 M-对称解 [J]. 数学学报, 2006, 49(4): 941-948.
[11] YUAN S F, WANG Q W, YU Y B. On Hermitian Solutions of the Split Quaternion Matrix Equation $AXB+CXD=E$ [J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2017, 27(4): 3235-3252.
[12] 黄敬频,蓝家新,毛利影,等. 具有箭形矩阵约束的四元数 Sylvester 方程求解 [J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(16): 264-271.

On M Self-Conjugate Solution of Quaternion Equation $AXB+CXD=E$

LAN Jia-xin, HUANG Jing-pin, WANG Min, MAO Li-ying
College of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China

Abstract: This paper aims at extending the concept of $\boldsymbol{M}$ symmetric matrix on real number field to the formation of $\boldsymbol{M}$ self-conjugate matrix on quaternion field and discussing $\boldsymbol{M}$ self-conjugate matrix solution of quaternion equation $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CXD}=\boldsymbol{E}$ and its optimal approximation. With the complex and real representations of a quaternion matrix, the Kronecker product of matrices and the specific structure of a $\boldsymbol{M}$ self-conjugate matrix, the quaternion equation with constraints can be converted to an unconstrained equation and to overcome the difficulty of non-commutative operation of quaternion multiplication. Then the necessary and sufficient conditions for the existence of the quaternion matrix equation $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CXD}=\boldsymbol{E}$ with $\boldsymbol{M}$ self-conjugate matrix and its general solution expression have been obtained. Meanwhile under the condition of the solution set of the $\boldsymbol{M}$ self-conjugate is not empty, by applying block matrix technology and matrix vec operator, and the expression of the optimal approximation solution to the given quaternion matrix is derived. Since $\boldsymbol{M}$ self-conjugate matrix is a generalization of self-conjugate quaternion matrix, the obtained results extend the type of structural solutions of this equation. Finally, we provide numerical algorithms and numerical examples to exemplify the results.

Key words: quaternion field; matrix equation; $\boldsymbol{M}$ self-conjugate; Kronecker product; optimal approximation

责任编辑 廖 坤