第 44 卷　第 8 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2019 年 8 月
Vol. 44　No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.08.002

张量伪谱的新包含域[①]

何　军，　刘衍民

遵义师范学院 数学学院，贵州 遵义 563006

摘要：张量伪谱可以看成是矩阵伪谱的推广，它在齐次动力系统中有着重要的作用．对张量伪谱圆盘定理进一步研究．利用张量伪谱中特征向量的最大元，给出了张量伪谱的新包含域．数值例子验证了结果的有效性．

关　键　词：张量；伪谱；包含域

中图分类号：**O151.21**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2019)08－0007－04

张量的特征值和特征向量是矩阵的特征值和特征向量的推广，在自动控制、数据统计、优化、图像处理、固体力学、量子纠缠和高维马尔科夫链中都有重要的应用[1-9]．复数域上的 m 阶 n 维的张量定义为

$$\boldsymbol{A}=(a_{i_1 i_2\cdots i_m})\in C^{[m,n]}\qquad a_{i_1 i_2\cdots i_m}\in\mathbb{C},\ i_1,\cdots,i_m\in N,\ N=\{1,2,\cdots,n\}$$

矩阵伪谱是分析矩阵特征值扰动的重要工具，在控制理论、微分方程数值解等领域都有着举足轻重的应用[10-11]．张量伪谱可以看成是矩阵伪谱的推广，它与齐次动力系统的稳定解息息相关[12]．

令 $z^{m-1}=\lambda$，若 $\mathrm{Re}(z)<0$，则齐次动力系统

$$\boldsymbol{u}'(t)\in((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{u}(t)^{m-1})^{\left[\frac{1}{m-1}\right]}\qquad \boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{C}^n \tag{1}$$

存在渐近稳定解．为了进一步判断其动力系统是否存在渐近稳定解，利用张量伪谱的定义，文献[12]得到了张量伪谱的圆盘定理，张量伪谱圆盘定理中得到的区域包含所有张量伪谱中的特征值，并且经常被用来判断齐次动力系统渐近稳定解的存在性．

本文通过对张量伪谱的进一步研究，得到了包含张量伪谱的更小的新包含域，新包含域包含所有张量伪谱中的特征值．数值例子验证了结果的有效性．

令 $r_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{(i_2,\cdots,i_m)\neq(i,\cdots,i)}|a_{ii_2\cdots i_m}|$，$r_i^j(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{(i_2,\cdots,i_m)\neq(i,\cdots,i)}|a_{ii_2\cdots i_m}|-|a_{ij\cdots j}|$，可得如下张量伪谱的新包含域：

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$，$\boldsymbol{E}=(e_{i_1\cdots i_m})\in C^{[m,n]}$，$\varepsilon\geqslant 0$．则

$$\Lambda_\varepsilon(\boldsymbol{A})\subseteq\Delta(\boldsymbol{A})=\Delta_1(\boldsymbol{A})\cup\Delta_2(\boldsymbol{A}) \tag{2}$$

其中

$$\Delta_1(\boldsymbol{A})=\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{K}_i(\boldsymbol{A})\qquad \Delta_2(\boldsymbol{A})=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ j\neq i}}\Delta_i^j(\boldsymbol{A})$$

$$\mathrm{K}_i(\boldsymbol{A})=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-a_{i\cdots i}|\leqslant n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon\}$$

$$\Delta_i^j(\boldsymbol{A})=\{\lambda\in\mathbb{C}:|(\lambda-a_{i\cdots i})(\lambda-a_{j\cdots j})-a_{ji\cdots i}a_{ij\cdots j}|\leqslant|\lambda-a_{j\cdots j}|(r_i^j(\boldsymbol{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)+|a_{ij\cdots j}|(r_j^i(\boldsymbol{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)\}$$

证　令 $\lambda\in\Lambda_\varepsilon(\boldsymbol{A})$，设非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ 是特征值 λ 对应的特征向量，即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}^{m-1}=\lambda\boldsymbol{x}^{[m-1]} \tag{3}$$

---

① 收稿日期：2018－03－11

基金项目：国家自然科学基金项目(71461027)；贵州省科技计划项目(黔科合平台人才[2017 年]5727-21 号)；贵州省高层次创新人才项目(遵科合人才[2017]8)．

作者简介：何　军(1981－)，男，副教授，博士，主要从事数值代数的研究．

令 $|x_p|=\max\{|x_i|: i\in N\}$，则 $|x_p|\neq 0$，其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$.

若向量 $\boldsymbol{x}$ 中只有 $x_p\neq 0$，由(3)式可得

$$(\lambda-a_{p\cdots p})x_p^{m-1}=\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N} e_{pi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m} \tag{4}$$

在等式(4)两边同时取绝对值，有

$$|\lambda-a_{p\cdots p}||x_p^{m-1}|\leqslant \sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}|e_{pi_2\cdots i_m}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_m}|\leqslant \sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}|e_{pi_2\cdots i_m}||x_p^{m-1}| \tag{5}$$

由 Hölder 不等式，有

$$\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}|e_{pi_2\cdots i_m}|\leqslant \sqrt{n^{m-1}\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}|e_{pi_2\cdots i_m}|^2}\leqslant n^{\frac{m-1}{2}}\|\boldsymbol{E}\|_F\leqslant n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon$$

由(5)式可得

$$|\lambda-a_{p\cdots p}|\leqslant n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon$$

即 $\lambda\in\Lambda_\varepsilon(\boldsymbol{A})\subseteq\Delta_1(\boldsymbol{A})\subseteq\Delta(\boldsymbol{A})$.

若向量 $\boldsymbol{x}$ 中至少有两个元 $x_p\neq 0$，$x_q\neq 0(p\neq q)$，则有

$$(\lambda-a_{p\cdots p})x_p^{m-1}-a_{pq\cdots q}x_q^{m-1}=\sum_{\substack{(i_2,\cdots,i_m)\neq(p,\cdots,p)\\(i_2,\cdots,i_m)\neq(q,\cdots,q)}} a_{pi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}+\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N} e_{pi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$$

$$(\lambda-a_{q\cdots q})x_q^{m-1}-a_{qp\cdots p}x_p^{m-1}=\sum_{\substack{(i_2,\cdots,i_m)\neq(p,\cdots,p)\\(i_2,\cdots,i_m)\neq(q,\cdots,q)}} a_{qi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}+\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N} e_{pi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$$

求解 x_p^{m-1}，有

$$\begin{aligned}(\lambda-a_{p\cdots p})(\lambda-a_{q\cdots q})x_p^{m-1}-a_{qp\cdots p}a_{pq\cdots q}x_p^{m-1}=(\lambda-a_{q\cdots q})\sum_{\substack{(i_2,\cdots,i_m)\neq(p,\cdots,p)\\(i_2,\cdots,i_m)\neq(q,\cdots,q)}} a_{pi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}+\\ (\lambda-a_{q\cdots q})\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N} e_{pi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}+a_{pq\cdots q}\sum_{\substack{(i_2,\cdots,i_m)\neq(p,\cdots,p)\\(i_2,\cdots,i_m)\neq(q,\cdots,q)}} a_{qi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}+\\ a_{pq\cdots q}\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N} e_{qi_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\end{aligned} \tag{6}$$

在等式(6)两边同时取绝对值，有

$$\begin{aligned}|(\lambda-a_{p\cdots p})(\lambda-a_{q\cdots q})-a_{qp\cdots p}a_{pq\cdots q}||x_p^{m-1}|\leqslant|\lambda-a_{q\cdots q}|\sum_{\substack{(i_2,\cdots,i_m)\neq(p,\cdots,p)\\(i_2,\cdots,i_m)\neq(q,\cdots,q)}}|a_{pi_2\cdots i_m}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_m}|+\\ |(\lambda-a_{q\cdots q})|\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}|e_{pi_2\cdots i_m}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_m}|+|a_{pq\cdots q}|\sum_{\substack{(i_2,\cdots,i_m)\neq(p,\cdots,p)\\(i_2,\cdots,i_m)\neq(q,\cdots,q)}}|a_{qi_2\cdots i_m}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_m}|+\\ |a_{pq\cdots q}|\sum_{i_2,\cdots,i_m\in N}|e_{qi_2\cdots i_m}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_m}|\end{aligned} \tag{7}$$

即

$$|(\lambda-a_{p\cdots p})(\lambda-a_{q\cdots q})-a_{qp\cdots p}a_{pq\cdots q}|\leqslant|\lambda-a_{q\cdots q}|(r_p^q(\boldsymbol{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)+|a_{pq\cdots q}|(r_q^p(\boldsymbol{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)$$

即 $\lambda\in\Lambda_\varepsilon(\boldsymbol{A})\subseteq\Delta_2(\boldsymbol{A})\subseteq\Delta(\boldsymbol{A})$.

定理2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$，$\boldsymbol{E}=(e_{i_1\cdots i_m})\in C^{[m,n]}$，$\varepsilon\geqslant 0$，则 $\Delta(\boldsymbol{A})\subseteq D(\boldsymbol{A})$.

证 情形1 若 $\lambda\in\Lambda_\varepsilon(\boldsymbol{A})\subseteq\Delta_1(\boldsymbol{A})$，由定理1可得

$$|\lambda-a_{p\cdots p}|\leqslant n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon\leqslant r_p(A)+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon$$

即 $\lambda\in D(\boldsymbol{A})$.

情形2 若 $\lambda\in\Lambda_\varepsilon(\boldsymbol{A})\subseteq\Delta_1(\boldsymbol{A})$，由定理1知，存在 $p\neq q$，使得

$$|(\lambda-a_{p\cdots p})(\lambda-a_{q\cdots q})-a_{qp\cdots p}a_{pq\cdots q}|\leqslant|\lambda-a_{q\cdots q}|(r_p^q(\boldsymbol{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)+|a_{pq\cdots q}|(r_q^p(A)+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)$$

又因为

$$|(\lambda-a_{p\cdots p})(\lambda-a_{q\cdots q})|-|a_{qp\cdots p}||a_{pq\cdots q}|\leqslant|(\lambda-a_{p\cdots p})(\lambda-a_{q\cdots q})-a_{qp\cdots p}a_{pq\cdots q}|$$

则

$$|(\lambda-a_{p\cdots p})(\lambda-a_{q\cdots q})|-|a_{qp\cdots p}||a_{pq\cdots q}|\leqslant$$
$$|\lambda-a_{q\cdots q}|(r_p^q(\mathbf{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)+|a_{pq\cdots q}|(r_q^p(\mathbf{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)$$

即

$$(|\lambda-a_{p\cdots p}|-r_p^q(\mathbf{A})-n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)|\lambda-a_{q\cdots q}|\leqslant|a_{pq\cdots q}|(r_p(\mathbf{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)$$

若 $|a_{pq\cdots q}|(r_p(\mathbf{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)=0$，则有

$$|\lambda-a_{p\cdots p}|-r_p^q(\mathbf{A})-n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon\leqslant 0$$

即有 $\lambda\in D(\mathbf{A})$. 若 $|a_{pq\cdots q}|(r_p(\mathbf{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon)>0$，则有

$$\frac{|\lambda-a_{p\cdots p}|-r_p^q(\mathbf{A})-n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon}{|a_{pq\cdots q}|}\frac{|\lambda-a_{q\cdots q}|}{r_p(\mathbf{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon}\leqslant 1$$

即

$$\frac{|\lambda-a_{p\cdots p}|-r_p^q(\mathbf{A})-n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon}{|a_{pq\cdots q}|}\leqslant 1$$

或者

$$\frac{|\lambda-a_{q\cdots q}|}{r_p(\mathbf{A})+n^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon}\leqslant 1$$

也就是说，$\lambda\in D_p(\mathbf{A})$ 或者 $\lambda\in D_q(\mathbf{A})$. 即 $\lambda\in D(\mathbf{A})$.

注 1　由定理 2 的结论可知，定理 1 得到的张量伪谱新包含域比文献[12]中定理 3.1 的包含域好，但是表达式更复杂，计算量更大.

我们用数值例子来说明结果的有效性.

设 $\mathbf{A}=(a_{ijkl})\in C^{[4,2]}$，其中

$$a_{1111}=-6+i\qquad a_{2222}=-6\qquad a_{1222}=1$$
$$a_{2111}=2\qquad a_{1122}=1\qquad a_{2211}=3$$

其余的 $a_{ijkl}=0$. 令 $z^{m-1}=\lambda$，$\varepsilon=0.4,0.5,0.8,1$，在图 1 中，我们给出关于 z 的包含区域，文献[12]的定理 3.1 中张量伪谱区域 $D(\mathbf{A})$ 用黑色表示，定理 1 中张量伪谱区域 $\Delta(\mathbf{A})$ 用红色表示. 由图 1 可以看出，定理 1 的结果比文献[12]中定理 3.1 的结果好.

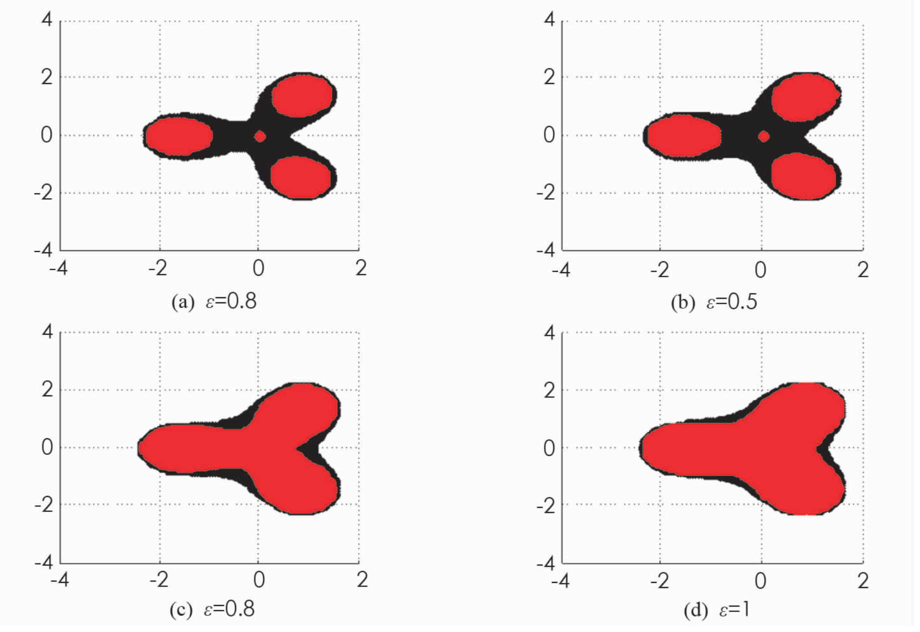

图 1　张量伪谱区域 $D(\mathbf{A})$ 和 $\Delta(\mathbf{A})$($z^{m-1}=\lambda$)

参考文献:

[1] QI L Q. Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor [J]. Journal of Symbolic Computation, 2005, 40(6): 1302-1324.

[2] LI C Q, LI Y T, KONG X. New Eigenvalue Inclusion Sets for Tensors [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2014, 21(1): 39-50.

[3] LI C Q, CHEN Z, LI Y T. A New Eigenvalue Inclusion Set for Tensors and Its Applications [J]. Linear Algebra and its Applications, 2015, 481: 36-53.

[4] LI C Q, WANG F, ZHAO J X, et al. Criterions for the Positive Definiteness of Real Supersymmetric Tensors [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 255: 1-14.

[5] BU C J, WEI Y P, SUN L Z, et al. Brualdi-Type Eigenvalue Inclusion Sets of Tensors [J]. Linear Algebra and its Applications, 2015, 480: 168-175.

[6] BU C J, JIN X Q, LI H F, et al. Brauer-Type Eigenvalue Inclusion Sets and the Spectral Radius of Tensors [J]. Linear Algebra and its Applications, 2017, 512: 234-248.

[7] 桑彩丽，赵建兴. 非负矩形张量最大奇异值的 S-型上界 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(6): 1-5.

[8] 钟 琴. 非负矩阵最大特征值的新界值 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(2): 40-43.

[9] 钟 琴，周 鑫，牟谷芳. 非负矩阵谱半径的上界估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(6): 50-53.

[10] TREFETHEN L N. Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators [J]. Bulletin of the American Math Society, 2005(2): 277-284.

[11] BOSE N. Test for Lyapunov Stability by Rational Operations [J]. IEEE Trans Automat Control, 1975, 20(5): 700-702.

[12] CHE M L, LI G Y, QI L Q, et al. Pseudo-Spectra Theory of Tensors and Tensor Polynomial Eigenvalue Problems [J]. Linear Algebra and its Applications, 2017, 533: 536-572.

Pseudo-spectrum Localization Sets of Tensors

HE Jun, LIU Yan-min

School of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563006, China

Abstract: The definition of pseudo-spectrum of tensors can be seemed as a generation of the definition of pseudo-spectrum of matrices, which plays important role in the homogeneous dynamical system. The pseudospectra localization of tensors is often used to determine the existence of its asymptotically stable solution for the homogeneous dynamical system. In this paper, a new pseudospectra localization of tensors is established by the maximum element of the eigenvector. Numerical experiments are reported to show effectiveness of our results.

Key words: tensor; pseudo-spectrum; localization set

责任编辑 廖 坤