DOI: 10.13718/j.cnki.xsxb.2019.08.003

半群 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$ 的秩和相关秩[①]

吕　会，　罗永贵，　赵　平

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：设自然数 $n \geqslant 3$，$\mathcal{OI}^{k}_{n}$ 是有限链 $[n]$ 上的双边 k 型-保序严格部分一一变换半群. 对任意的 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，$0 \leqslant r \leqslant n-1$，记 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)} = \{\alpha \in \mathcal{OI}^{k}_{n}: |\operatorname{im}(\alpha)| \leqslant r\}$ 为半群 $\mathcal{OI}^{k}_{n}$ 的双边理想. 通过对秩为 r 的元素和格林关系的分析，分别获得了半群 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$ 的极小生成集和秩. 进一步确定了当 $0 \leqslant l \leqslant r$ 时，半群 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$ 关于其理想 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,l)}$ 的相关秩.

关　键　词：部分一一变换半群；保序；秩 ；相关秩

中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2019)08-0011-07

设 $[n] = \{1, 2, \cdots, n-1, n\}(n \geqslant 4)$，并赋予自然数的大小序. $\mathcal{I}_n$ 与 $\mathcal{S}_n$ 分别表示 $[n]$ 上的对称逆半群和对称群，$\mathcal{SI}_n = \mathcal{I}_n \backslash \mathcal{S}_n$ 是 $[n]$ 上的部分一一奇异变换半群. 设 $\alpha \in \mathcal{SI}_n$，若对任意的 $x, y \in \operatorname{dom}(\alpha)$，由 $x \leqslant y$ 可推出 $x\alpha \leqslant y\alpha$，则称 α 是保序的. 设 $\mathcal{O}_n$ 为 T_n 中所有保序变换之集(不含 $[n]$ 上的恒等变换)，则 $\mathcal{O}_n$ 是 T_n 的子半群，称 $\mathcal{O}_n$ 为 $[n]$ 上的保序变换半群；记 $\mathcal{OI}_n$ 为保序对称逆半群 $\mathcal{I}_n \backslash \mathcal{S}_n$ 中所有保序变换之集，则 $\mathcal{OI}_n$ 是 $\mathcal{I}_n \backslash \mathcal{S}_n$ 的逆子半群，称 $\mathcal{OI}_n$ 为保序严格部分一一变换半群. 设 k 是 $[n]$ 上的一个固定点，令

$$\mathcal{OI}_n{}^{k} = \{\alpha \in \mathcal{OI}_n: \forall\, x \in [n],\ x \leqslant k \Leftrightarrow x\alpha \leqslant k\}$$

则称 $\mathcal{OI}^{k}_{n}$ 为 $[n]$ 上双边 k 型-保序严格部分一一变换半群. 记

$$\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)} = \{\alpha \in \mathcal{OI}^{k}_{n}: |\operatorname{im}(\alpha)| \leqslant r\}(0 \leqslant r \leqslant n-1)$$

易见 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$ 是 $\mathcal{OI}^{k}_{n}$ 的子半群，且对任意的 $\alpha \in \mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$，$\beta, \gamma \in \mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$，均有 $|\operatorname{im}(\beta\alpha\gamma)| \leqslant r$，即 $\beta\alpha\gamma \in \mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$，因而 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$ 是 $\mathcal{OI}^{k}_{n}$ 的双边理想.

通常有限半群 S 的秩定义为 $\operatorname{rank}(S) = \min\{|A|: A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$. 半群 S 及其子半群 V 之间的相关秩定义为 $r(S, V) = \min\{|A|: A \subseteq S, A \cap V = \varnothing, \langle A \cup V \rangle = S\}$，易见 $r(S, S) = 0$. 对于有限半群的秩及其相关秩的研究目前已有许多结果[1-13]. 文献[1]考虑了 $[n]$ 上的保序有限部分一一奇异变换半群 $\mathcal{OI}_n$ 的理想 $\mathcal{K}_0(n, r) = \{\alpha \in \mathcal{OI}_n: |\operatorname{im}(\alpha)| \leqslant r\}(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ 的生成集和秩，确定了半群 $\mathcal{K}_0(n, r)$ 的秩为 C_n^r. 文献[2]考虑了半群 $\mathcal{OI}_n$ 的 m 偏度秩存在时一定等于 n. 文献[3-5]考虑了几类不同保序变换半群的秩和相关秩. 文献[6-11]研究了几类具有 k 型-特征的变换半群的秩.

本文在文献[1-11]的基础上继续考虑双边 k 型-保序严格部分一一变换半群 $\mathcal{OI}^{k}_{n}$ 的双边理想 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$ 的秩和相关秩，证明了如下主要结果：

定理 1　设 $n \geqslant 3$，$0 \leqslant r \leqslant n-1$，则 $\mathcal{K}_r$ 是 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}$ 的生成集，即 $\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)} = \langle \mathcal{K}_r \rangle$.

定理 2　设 $n \geqslant 3$，$0 \leqslant r \leqslant n-1$，则 $\operatorname{rank}(\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}) = C_n^r$.

定理 3　设 $n \geqslant 3$，$0 \leqslant l \leqslant r \leqslant n-1$，则 $r(\mathcal{OI}^{k}_{(n,\,r)}, \mathcal{OI}^{k}_{(n,\,l)}) = \begin{cases} 0 & l = r \\ C_n^r & 0 \leqslant l < r \end{cases}$.

---

① 收稿日期：2018-09-20

基金项目：贵州省科学技术基金-贵州师范大学联合科技基金项目(黔科合 LH 字(2014)7056 号).

作者简介：吕　会(1995-)，女，硕士研究生，主要从事半群代数理论的研究.

1 预备知识

设 A 是自然序集$[n]$的非空子集，设 $\alpha \in \mathcal{OI}^k_{(n,r)}$，用 $\mathrm{im}(\alpha)$ 表示 α 的象集，$\ker(\alpha)$ 表示 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 上的如下等价关系：$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in \mathrm{dom}(\alpha) \times \mathrm{dom}(\alpha): x\alpha = y\alpha\}$. 对任意的 $t \in \mathrm{im}(\alpha)$，$t\alpha^{-1}$ 表示 t 的原象集且 $|t\alpha^{-1}| = 1$. 若 $|\mathrm{im}(\alpha)| = r$，$1 \leqslant r \leqslant n-1$，则由双边 k 型-保序性容易验证 α 有如下表示法：

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < a_i \leqslant k < a_{i+1} < \cdots < a_r$，$b_1 < b_2 < \cdots < b_{i-1} < b_i \leqslant k < b_{i+1} < \cdots < b_r$，易证 α 是正则元，且 $\mathcal{OI}^k_n$是正则半群. 易见对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$，当 $a_i = b_i$ 时，α 是半群 $\mathcal{OI}^k_n$的幂等元.

为叙述方便，这里引用 Green- 等价关系，不难验证，在半群 $\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$ 中 $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{K}$[1] 有如下刻划：对任意的 $\alpha,\beta \in \mathcal{OI}^k_{(n,r)}$，有

(i) $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$；

(ii) $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ 当且仅当 $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$；

(iii) $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$ 当且仅当 $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ 且 $|\mathrm{im}(\alpha) \cap [1, k]| = |\mathrm{im}(\beta) \cap [1, k]|$；

(iv) $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$ 当且仅当 $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$.

易证 $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \mathcal{D}_i$，其中 $s = \begin{cases} r+1 & k \geqslant r,\ n-k \geqslant r \\ n-k+1 & k \geqslant r,\ n-k < r \\ k+1 & k < r,\ n-k \geqslant r \\ n-r+1 & k < r,\ n-k < r \end{cases}$

易见 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$，$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$. 记 $\mathcal{K}_r = \{\alpha \in \mathcal{OI}^k_{(n,r)}: |\mathrm{im}(\alpha)| = r\}$，$0 \leqslant r \leqslant n-1$，$1 \leqslant k \leqslant n-1$. 显然 $\mathcal{K}_0$，$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \cdots, \mathcal{K}_{r-1}, \mathcal{K}_r$ 恰好是 $\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$ 的 $r+1$ 个 $\mathcal{K}$-类，不难验证 $\mathcal{OI}^k_n = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \mathcal{K}_i$ 是具有包含关系 $\mathcal{OI}^k_{(n,0)} \subset \mathcal{OI}^k_{(n,1)} \subset \cdots \subset \mathcal{OI}^k_{(n,n-1)} = \mathcal{OI}^k_n$的双边理想链.

定义 1 用 $X_n(r)$ 表示自然序集$[n] = \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}(n \geqslant 4)$ 的所有 r 元子集，则 $X_n(r)$ 中共有 C^r_n(其中 C^r_n 表示从 n 个元素中取出 r 个元素的组合数) 个元素. 令 $t = C^r_n$，记 $X_n(r) = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$，其中 $A_i = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_r\}$，$A_i \subseteq [n]$ 且 $|A_i| = r(i = 1,2,\cdots,t-1, t)$. 将 $X_n(r)$ 按照不同 $\mathcal{D}$ 关系分类，记为$[D] = \{\forall A, D \in X_n(r): |A \cap [1, k]| = |D \cap [1, k]|\}$. 进一步可证：对于任意的 $\alpha,\beta \in [D]$，其中 $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} A_p \\ A_q \end{pmatrix}$，可知 $|A_j| = |A_q|$ 且 $|A_j \cap [1, k]| = |A_q \cap [1, k]|$.

本文未定义的术语及符号参见文献[12-13].

2 定理的证明

引理 1 对 $0 \leqslant r \leqslant 1$，有 $\mathcal{K}_r \subseteq \mathcal{K}_{r+1} \cdot \mathcal{K}_{r+1}$.

证 用 $\varnothing$ 表示空变换，则 $\mathcal{K}_0 = \{\varnothing\}$，令 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma \in \mathcal{K}_1$ 且 $\varnothing = \beta\gamma$，于是 $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}_1 \cdot \mathcal{K}_1$.

对任意 $\alpha \in \mathcal{K}_1$，不妨设 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{OI}^k_n$，注意到 $n \geqslant 4$，取 $c \in [n] \backslash \{a\}$，分以下情况证明 $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \cdot \mathcal{K}_2$.

情形 1 $a < c$ 且 $k = 1$

当 $a = k = 1$ 时，易知 $b = 1$，令 $\beta = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ b & 3 \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma \in \mathcal{K}_2$ 且 $\alpha = \beta\gamma$.

当 $a \neq 1$ 时，易知 $b \neq 1$，令 $\beta = \begin{pmatrix} a & c \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b-1 & b \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma \in \mathcal{K}_2$ 且 $\alpha = \beta\gamma$.

情形 2 $a < c$ 且 $k \neq 1$

当 $a \leqslant k < c$ 时，易知 $b \leqslant k$，令 $\beta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & c \end{pmatrix}$，$\gamma = \begin{pmatrix} b & c+1 \\ b & c+1 \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma \in \mathcal{K}_2$ 且 $\alpha = \beta\gamma$.

当 $a<c\leqslant k$ 时，易知 $b\leqslant k$，令 $\beta=\begin{pmatrix} a & c \\ k-1 & k \end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ b & k+1 \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_2$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $k<a<c$ 时，易知 $b>k$，令 $\beta=\begin{pmatrix} a & c \\ k+1 & k+2 \end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix} k & k+1 \\ k & b \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_2$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 3　$a>c$ 且 $k=1$

当 $c=k=1$ 时，令 $\beta=\begin{pmatrix} c & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ b & b+1 \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_2$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $c\neq 1$ 时，易知 $1<c<a$，$b>1$，令 $\beta=\begin{pmatrix} c & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_2$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 4　$a>c$ 且 $k\neq 1$

当 $c\leqslant k<a$ 时，易知 $b>k$，令 $\beta=\begin{pmatrix} c & a \\ k & k+1 \end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix} k+1 & k+2 \\ b & b+1 \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_2$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $k<c<a$ 时，易知 $b>k$，令 $\beta=\begin{pmatrix} c & a \\ k+1 & k+2 \end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_2$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $c<a\leqslant k$ 时，易知 $b\leqslant k$，令 $\beta=\begin{pmatrix} c & a \\ k-1 & k \end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix} k & k+1 \\ b & k+1 \end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_2$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

综上所述，对 $0\leqslant r\leqslant 1$，有 $\mathcal{K}_r\subseteq\mathcal{K}_{r+1}\cdot\mathcal{K}_{r+1}$.

引理 2　对 $2\leqslant r\leqslant m-1$，$3\leqslant m\leqslant n-1$，有 $\mathcal{K}_r\subseteq\mathcal{K}_{r+1}\cdot\mathcal{K}_{r+1}$.

证　任取

$$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_1<a_2<\cdots<a_{i-1}<a_i\leqslant k<a_{i+1}<\cdots<a_r$，$b_1<b_2<\cdots<b_{i-1}<b_i\leqslant k<b_{i+1}<\cdots<b_r$，$0\leqslant i\leqslant r$，令 $a_0=0$.

以下分两种情况证明 $\alpha\in\mathcal{K}_{r+1}\cdot\mathcal{K}_{r+1}$.

情形 1　α 为幂等元.

显然 α 是 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 上的恒等变换. 由 $r\leqslant n-2$ 可知，$|[n]\backslash\mathrm{dom}(\alpha)|\geqslant 2$. 任取 $x_1,x_2\in[n]\backslash\mathrm{dom}(\alpha)$. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 分别为 $\mathrm{dom}(\varepsilon_1)=\mathrm{dom}(\alpha)\cup\{x_1\}$，$\mathrm{dom}(\varepsilon_2)=\mathrm{dom}(\alpha)\cup\{x_2\}$ 上的恒等变换，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in E(\mathcal{K}_{r+1})$ 且 $\alpha=\varepsilon_1\varepsilon_2$.

情形 2　α 为非幂等元.

由 α 的标准表示可知，当 $i=0$ 或 $i=r$ 时，$\alpha\in\mathcal{OI}_n$. 由文献[1]的引理 4 易知，存在 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_{r+1}$，使得 $\alpha=\beta\gamma$. 下证 $0<i<r$，可分 3 种子情形讨论：

情形 2.1　$|\{1,2,\cdots,k\}\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}|=0$，$|\{k+1,k+2,\cdots,n\}\backslash\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_r\}|\neq 0$. 因 $\alpha\in\mathcal{K}_r$ 且 $2\leqslant r\leqslant n-2$，可知 $2\leqslant|\{k+1,k+2,\cdots,n\}\backslash\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_r\}|\leqslant n-k$. 即

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & a_{i+1} & \cdots & a_r \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & b_{i+1} & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

当 $a_r\neq n$ 且 $b_r\neq n$ 时，令

$$\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & a_{i+1} & \cdots & a_r & n \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & r & n \end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & r & n \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & b_{i+1} & \cdots & b_r & n \end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $a_r\neq n$ 且 $b_r=n$ 时，由 $2\leqslant r\leqslant n-2$ 知，存在 $p\in\{i,i+2,\cdots,r-1\}$，使得 $b_{p+1}-b_p>1$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k & a_{i+1} & \cdots & a_p & a_{p+1} & \cdots & a_r & n\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & p-1 & p+1 & \cdots & r+1 & n\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & p-1 & p & p+1 & \cdots & r & r+1\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & b_{i+1} & \cdots & b_p & b_p+1 & b_{p+1} & \cdots & b_{r-1} & b_r\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $a_r=n$ 且 $b_r\neq n$ 时，由 $2\leqslant r\leqslant n-2$ 知，存在 $p\in\{i,i+2,\cdots,r-1\}$，使得 $a_{p+1}-a_p>1$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k & a_{i+1} & \cdots & a_p & a_p+1 & a_{p+1} & \cdots & a_r\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & r+1\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & p & p+2 & \cdots & r+1 & n\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & b_{i+1} & \cdots & b_p & b_{p+1} & \cdots & b_r & n\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $a_r=n$ 且 $b_r=n$ 时，由 $2\leqslant r\leqslant n-2$ 知，存在 $p,q\in\{i,i+2,\cdots,r-1\}$，使得 $a_{p+1}-a_p>1$，$b_{q+1}-b_q>1$. 当 $p<q$ 时，令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k & a_{i+1} & \cdots & a_p & a_p+1 & a_{p+1} & \cdots & a_q & a_{q+1} & \cdots & a_r\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & q & q+2 & \cdots & r+2\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k & i+1 & \cdots & p & p+2 & \cdots & q & q+1 & q+2 & \cdots & r+2\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & b_{i+1} & \cdots & b_p & b_{p+1} & \cdots & b_q & b_p+1 & b_{q+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$. 同理可证，当 $p\geqslant q$ 时，结论仍然成立.

情形 2.2 $|\{1,2,\cdots,k\}\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}|\neq 0$，$|\{k+1,k+2,\cdots,n\}\backslash\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_r\}|=0$. 因 $\alpha\in\mathscr{K}_r$ 且 $2\leqslant r\leqslant n-2$，可知 $2\leqslant|\{1,2,\cdots,k\}\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}|\leqslant k$. 即

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_i & k+1 & \cdots & n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_i & k+1 & \cdots & n\end{bmatrix}$$

当 $a_1\neq 1$ 且 $b_1\neq 1$ 时，令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_i & k+1 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & i+1 & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & i+1 & k+1 & \cdots & n\\ 1 & b_1 & \cdots & b_i & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $a_1\neq 1$ 且 $b_1=1$ 时，由 $2\leqslant r\leqslant n-2$ 知，存在 $p\in\{1,2,\cdots,i-1\}$，使得 $b_{p+1}-b_p>1$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_p & a_p+1 & \cdots & a_i & k+1 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & p+1 & p+3 & \cdots & i+2 & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}2 & 3 & \cdots & p+1 & p+2 & p+3 & \cdots & i+2 & k+1 & \cdots & n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p & b_p+1 & b_{p+1} & \cdots & b_i & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $a_1=1$ 且 $b_1\neq 1$ 时，由 $2\leqslant r\leqslant n-2$ 知，存在 $p\in\{1,2,\cdots,i-1\}$，使得 $a_{p+1}-a_p>1$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_p & a_p+1 & a_{p+1} & \cdots & a_i & k+1 & \cdots & n\\ 2 & 3 & \cdots & p+1 & p+2 & p+3 & \cdots & i+2 & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & p+1 & p+3 & \cdots & i+2 & k+1 & \cdots & n\\ 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_p & b_{p+1} & \cdots & b_i & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $a_1=1$ 且 $b_1=1$ 时，由 $2\leqslant r\leqslant n-2$ 知，存在 $p,q\in\{1,2,\cdots,i-1\}$，使得 $a_{p+1}-a_p>1$，$b_{p+1}-b_p>1$，当 $p<q$ 时，令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_p & a_p+1 & a_{p+1} & \cdots & a_q & a_{q+1} & \cdots & a_i & k+1 & \cdots & n\\ 2 & 3 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & q+1 & q+3 & \cdots & i+2 & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & \cdots & p & p+2 & \cdots & q+1 & q+2 & q+3 & \cdots & i+2 & k+1 & \cdots & n\\ b_1 & \cdots & b_p & b_{p+1} & \cdots & b_q & b_q+1 & b_{q+1} & \cdots & b_i & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$. 同理可证，当 $p\geqslant q$ 时，结论仍然成立.

情形 2.3　$|\{1,2,\cdots,k\}\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}|\neq 0$，$|\{k+1,k+2,\cdots,n\}\backslash\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_r\}|\neq 0$. 由 $r\leqslant n-2$ 可得，存在两个不同元素 $x,y\in[n]$，使得 $x\in\{1,2,\cdots,k\}\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$，$y\in\{k+1,k+2,\cdots,n\}\backslash\{b_{i+1},b_{i+2},\cdots,b_r\}$. 假设 $a_p<x<a_{p+1}(p\in\{1,2,\cdots,i\})$，$b_q<y<b_{q+1}(q\in\{i+1,i+2,\cdots,r-1\})$，令

$$\beta=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & x & \cdots & a_i & a_{i+1} & a_r\\ a_1 & \cdots & x & \cdots & a_i & b_{i+1} & b_r\end{bmatrix}$$

$$\gamma=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_i & b_{i+1} & \cdots & y & \cdots & b_r\\ b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & \cdots & y & \cdots & b_r\end{bmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{K}_{r+1}$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

综上所述，$\alpha\in\mathcal{K}_{r+1}\cdot\mathcal{K}_{r+1}$，再由 α 的任意性可得 $\mathcal{K}_r\subseteq\mathcal{K}_{r+1}\cdot\mathcal{K}_{r+1}$.

定理 1 的证明　由引理 1 引理 2 可知，任意的 $\alpha\in\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$ 可以表达成 $\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$ 的顶端 $\mathcal{K}$-类 $\mathcal{K}_r$ 中秩为 r 的若干元素的乘积或 $\alpha\in\mathcal{K}_r$. 换句话说，$\mathcal{K}_r$ 是 $\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$ 的生成集，即 $\mathcal{OI}^k_{(n,r)}=\langle\mathcal{K}_r\rangle$.

引理 3　设 $\alpha,\beta\in\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$，若 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{K}$ 且 $(\alpha,\alpha\beta)\in\mathcal{K}$，则 $(\alpha\beta,\beta)\in\mathcal{L}$，$(\alpha,\alpha\beta)\in\mathcal{R}$.

证　设 $\alpha,\beta\in\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$，若 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{K}$ 且 $(\alpha,\alpha\beta)\in\mathcal{K}$，则 $|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|=|\mathrm{im}(\alpha\beta)|$. 再由 $\mathrm{im}(\alpha\beta)\subseteq\mathrm{im}(\beta)$，$\ker(\alpha)\subseteq\ker(\alpha\beta)$ 与 $[n]$ 的有限性知，$\mathrm{im}(\alpha\beta)=\mathrm{im}(\beta)$，$\ker(\alpha)=\ker(\alpha\beta)$，即 $(\alpha\beta,\beta)\in\mathcal{L}$，$(\alpha,\alpha\beta)\in\mathcal{R}$.

由引理 3 可知，$\mathcal{OI}^k_{(n,r)}$ 的任意一个生成集都必须覆盖 $\mathcal{K}_r$ 中每个 $\mathcal{L}$-类和 $\mathcal{R}$-类. 由组合知识可知，$\mathcal{K}_r$ 中共有 C_n^r 个 $\mathcal{L}$-类和 C_n^r 个 $\mathcal{R}$-类. 因此，得到如下推论 1：

推论 1　设自然数 $n\geqslant 3$，则 $\mathrm{rank}(\mathcal{OI}^k_{(n,r)})\geqslant C_n^r$.

引理 4　设自然数 $n\geqslant 3$，则 $\mathrm{rank}(\mathcal{OI}^k_{(n,0)})=1$，$\mathrm{rank}(\mathcal{OI}^k_{(n,1)})=C_n^1=n$.

证　由引理 1 的证明过程易知 $\mathcal{OI}^k_{(n,0)}=\mathcal{J}_0=\{\varnothing\}$，显然有 $\mathrm{rank}(\mathcal{OI}^k_{(n,0)})=1$. 下证 $\mathrm{rank}(\mathcal{OI}^k_{(n,1)})=C_n^1=n$.

情形 1　当 $k=1$ 时，首先验证 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\alpha_{i-1}=\begin{pmatrix}i\\i+1\end{pmatrix}$，$\alpha_i=\begin{pmatrix}i+1\\i+2\end{pmatrix}$，$\alpha_{i+1}=\begin{pmatrix}i+2\\i+3\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\alpha_{n-3}=\begin{pmatrix}n-2\\n-1\end{pmatrix}$，$\alpha_{n-2}=\begin{pmatrix}n-1\\n\end{pmatrix}$，$\alpha_{n-1}=\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}\in\mathcal{K}_1$，并且这 n 个元素位于 $\mathcal{K}_1$ 中不同的 $\mathcal{L}$-类和不同的 $\mathcal{R}$-类. 令 $M_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\}$，则 $|M_1|=C_n^1=n$.

其次，对任意的 $\alpha\in\mathcal{K}_1$ 必存在 $i,j\in\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$，使得 $\alpha=\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}$，则：

(i) 若 $i=j=1$，则 $\alpha=\beta_1$；

(ii) 若 $i\neq 1$ 且 $j\neq 1$，当 $i<j$ 时，有 $\alpha=\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-1}$；

(iii) 当 $i=j$ 时，有 $\alpha=\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}$；

(iv) 当 $i>j$ 时，有 $\alpha=\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{j-2}\alpha_{j-1}$.

由此可见 $\mathcal{K}_1\subseteq\langle M_1\rangle$. 结合定理 1 知 $\mathcal{OI}^k_{(n,1)}=\langle M_1\rangle$.

情形 2　当 $k=n-1$ 时，验证 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\alpha_{i-1}=\begin{pmatrix}i-1\\i\end{pmatrix}$，$\alpha_i=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_{i+1}=\begin{pmatrix}i+1\\i+2\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\alpha_{n-2}=\begin{pmatrix}n-2\\n-1\end{pmatrix}$，$\alpha_{n-1}=\begin{pmatrix}n-1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix}\in\mathcal{K}_1$，并且这 n 个元素位于 $\mathcal{K}_1$ 中不同的 $\mathcal{L}$-类和不同的 $\mathcal{R}$-类. 令 $M_2=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\}$，则 $|M_2|=C_n^1=n$.

类似情形 1 可证 $\mathcal{K}_1\subseteq\langle M_2\rangle$，$\mathcal{OI}^k_{(n,1)}=\langle M_2\rangle$.

情形 3　当 $k=i$，$2\leqslant i<n-1$ 时，验证 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\alpha_{i-1}=\begin{pmatrix}i-1\\i\end{pmatrix}$，$\alpha_i=$

$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} i+1 \\ i+2 \end{pmatrix}$, …, $\alpha_{n-2} = \begin{pmatrix} n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}$, $\alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n \end{pmatrix}$, $\alpha_n = \begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix} \in \mathscr{K}_1$,并且这 n 个元素位于 $\mathscr{K}_1$ 中不同的 $\mathscr{L}$-类和不同的 $\mathscr{R}$-类. 令 $M_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$,则 $|M_3| = C_n^1 = n$.

类似情形 1 可证 $\mathscr{K}_1 \subseteq \langle M_3 \rangle$, $\mathscr{OI}_{(n,1)}{}^k = \langle M_3 \rangle$.

综上所述,注意到 $|M_1| = |M_2| = |M_3| = C_n^1 = n$. 进一步得到 $\mathrm{rank}(\mathscr{OI}^k_{(n,1)}) \leqslant C_n^1 = n$. 再结合推论 1 立即有 $\mathrm{rank}(\mathscr{OI}^k_{(n,1)}) = C_n^1 = n$.

引理 5 设 $n \geqslant 3$, $2 \leqslant r \leqslant n-1$,则在 $\mathscr{K}_r$ 中存在基数为 C_n^r 的集合 M,使得 $\mathscr{K}_r \subseteq \langle M \rangle$.

证 首先,构造 $\mathscr{K}_r$ 中基数为 C_n^r 的集合 M.

对任意的 $D \in X_n(r) = \{D_1, D_2, \cdots, D_t\}(t = C_n^r)$,不妨设 $[D] = \{D = A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}, A_m\}$,其中 $m < t = C_n^r$.

若 $m = 1$,只有 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} D \\ D \end{pmatrix} = \varepsilon_D \in \mathscr{K}_r$;

若 $2 < m \leqslant t = C_n^r$,容易验证:$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$, …, $\alpha_{i-1} = \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ A_i \end{pmatrix}$, $\alpha_i = \begin{pmatrix} A_i \\ A_{i+1} \end{pmatrix}$, $\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i+1} \\ A_{i+2} \end{pmatrix}$, …, $\alpha_{m-2} = \begin{pmatrix} A_{m-2} \\ A_{m-1} \end{pmatrix}$, $\alpha_{m-1} = \begin{pmatrix} A_{m-1} \\ A_m \end{pmatrix}$, $\alpha_m = \begin{pmatrix} A_m \\ A_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{K}_r$.

对其余的 $\mathscr{D}$-类也用类似的方式进行构造,可以得到集合 $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{t-1}, \alpha_t\}(t = C_n{}^r)$,并且这 t 个元素位于 $\mathscr{K}_r$ 中不同的 $\mathscr{L}$-类和不同的 $\mathscr{R}$-类.

其次,对任意的 $\alpha \in \mathscr{K}_r$,验证 $\alpha \in \langle M \rangle$,即 $\mathscr{K}_r \subseteq \langle M \rangle$.

对任意的 $\alpha \in \mathscr{K}_r$,必存在 $D \in X_n(r)$,使得 $\mathrm{im}(\alpha)$, $\mathrm{dom}(\alpha) \in [D]$. 不失一般性可设 $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \end{pmatrix}$,其中 A_i, $A_j \in [D] = \{D = A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}, A_m\}$ 且 $i, j \in \{1, 2, \cdots, m-1, m\}$.

若 $|[D]| = 1$,则 $\alpha = \varepsilon_D = \varepsilon_{\mathrm{im}(\alpha)}$;

若 $|[D]| \geqslant 2$,则:

当 $i < j$ 时,有 $\alpha = \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-1}$;

当 $i = j$ 时,有 $\alpha = \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{m-1} \alpha_m \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{i-2} \alpha_{i-1}$;

当 $i > j$ 时,有 $\alpha = \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{m-1} \alpha_m \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1}$.

定理 2 的证明 由引理 4 与引理 5 可知,任意的 $\alpha \in \mathscr{K}_r$ 可以表达为 M 中若干元素的乘积或 $\alpha \in M$,即 $\mathscr{K}_r \subseteq \langle M \rangle$. 再由定理 1 知,$M$ 是 $\mathscr{OI}^k_{(n,r)}$ 的生成集,即 $\mathscr{OI}^k_{(n,r)} = \langle M \rangle$,其中 M 的定义见引理 4 与引理 5 的证明过程. 注意到 $|M| = C_n^r$,进一步有 $\mathrm{rank}(\mathscr{OI}^k_{(n,r)}) \leqslant C_n^r$. 因此,结合推论 1 与引理 4,立即有

$$\mathrm{rank}(\mathscr{OI}^k_{(n,r)}) = C_n^r$$

定理 3 的证明 当 $l = r$ 时,显然有 $r(\mathscr{OI}^k_{(n,r)}, \mathscr{OI}^k_{(n,l)}) = 0$.

当 $0 \leqslant l < r$ 时,由定理 1 与定理 2 的证明过程可知

$$\mathscr{OI}^k_{(n,r)} = \langle M \rangle \qquad M \cap \mathscr{OI}^k_{(n,l)} = \varnothing \qquad |M| = C_n^r$$

再由相关秩的定义,可知 $r(\mathscr{OI}^k_{(n,r)}, \mathscr{OI}^k_{(n,1)}) = C_n^r$. 即证得

$$r(\mathscr{OI}^k_{(n,r)}, \mathscr{OI}^k_{(n,l)}) = \begin{cases} 0 & l = r \\ C_n^r & 0 \leqslant l < r \end{cases}$$

注 1 半群 $\mathscr{OI}^k_{(n,n)} = \mathscr{OI}^k_{(n,n-1)} \cup \{\varepsilon_{[n]}\}$ 不是由顶端 $\mathscr{K}$-类 $\mathscr{K}_n$ 生成的,且 $\mathrm{rank}(\mathscr{OI}^k_{(n,n)}) = n+1$.

参考文献:

[1] 罗永贵,游泰杰,高荣海. 关于 OI_n 和 DOI_n 的理想的生成集及其秩 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2012,30(2):54-58.

[2] 吴金艳,赵 平,游泰杰. 半群 OI_n 的偏度秩 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2015,37(10):67-71.

[3] 罗永贵. 半群 $W(n, r)$的非群元秩和相关秩 [J]. 山东大学学报(理学版),2013,48(12),70-74.

［4］ 罗永贵. 半群 $W_D(n,r)$ 的非群元秩和相关秩［J］. 四川师范大学学报(自然科学版)，2017，40(3)，308-312.
［5］ 罗永贵，杨丛丽. 半群 $U(n,r)$ 的秩和拟幂等元秩［J］. 四川师范大学学报(自然科学版)，2015，38(4)：508-513.
［6］ 易　林，游泰杰，赵　平. 半群 $OI_n(k)$ 的秩［J］. 数学的实践与认识，2017，47(6)：251-255.
［7］ 易　林，游泰杰，赵　平. 半群 $OI_n(k,m)$ 的秩［J］. 四川师范大学学报(理学版)，2018，41(1)：19-23.
［8］ 李先崇，赵　平. 半群 $PO_n(k)$ 的幂等元秩［J］. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(10)：9-12.
［9］ 张传军，朱华伟. 半群 $S_n(k)$ 的秩［J］. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：60-68.
［10］张传军，赵　平. 半群 $O_n(k)$ 的秩［J］. 数学的实践与认识，2014，44(9)：243-247.
［11］张传军，朱华伟，肖宏治. 半群 $PO_n(k,m)$ 的秩［J］. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(6)：6-11.
［12］HOWIEJM. Fundamentals of Semigroup Theory［M］. Oxford：Oxford University Press，1995.
［13］GANYUSHKINO，MAZORCHUKV. Classical Finite Transformation Semigroups［M］. London：Springer-Verlag，2009.

On Rank and Relative Rank of the Semigroup $\mathcal{OI}^{k}_{(n,r)}$

LÜ　Hui，　LUO Yong-gui，　ZHAO　Ping

School of Mathematics Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China

Abstract：Let $\mathcal{OI}^{k}_{n}$ be the semigroup of all bilateral k type-order-preserving one-to-one partial transformations on a finite-chain $[n]$ ($n>3$)，and let $\mathcal{OI}^{k}_{(n,r)}=\{\alpha\in\mathcal{OI}^{k}_{n}:|\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant r\}$ be the two-sided ideal of the semigroup $\mathcal{OI}^{k}_{(n,r)}$ for an arbitrary integer k,r such that $1\leqslant k\leqslant n-1$，$0\leqslant r\leqslant n-1$. By analyzing the elements of rank r and Green's relations，the minimal generating sets and the rank of the semigroup $\mathcal{OI}^{k}_{(n,r)}$ are obtained，respectively. Furthermore，the relative rank of the semigroup $\mathcal{OI}^{k}_{(n,r)}$ with respect to itself each ideal $\mathcal{OI}^{k}_{(n,l)}$ is determined for $0\leqslant l\leqslant r$.

Key words：partial one-to-one transformation semigroup；order-preserving；rank；relative rank

责任编辑　廖　坤