DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2019.08.004

左分次 *GF*-封闭环上的 Gorenstein 分次平坦模①

毛海玲，　杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：设 R 是分次环．证明了 Gorenstein 分次平坦模类为投射可解类当且仅当它是扩张封闭的．还引入了左分次 GF-封闭环，刻画了此环上 Gorenstein 分次平坦模的一些性质．

关　键　词：Gorenstein 分次平坦模；投射可解类；左分次 GF-封闭环

中图分类号：**O153.3**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2019)08－0018－05

自20世纪60年代以来，相对同调代数特别是Gorenstein同调代数受到了学者们的广泛关注．为了进一步描述Gorenstein同调代数在一般环上的作用．文献[1]介绍了 Gorenstein平坦模的概念，然而Gorenstein平坦模的类是否关于扩张封闭还是未知的．文献[2] 引入了左 GF- 封闭环并且给出了此环上 Gorenstein 平坦模的性质．

分次环的同调理论在代数几何领域中有着重要的作用．文献[3]引入了Gorenstein分次平坦模的概念，定义了分次 FC 环，并给出了此环上 Gorenstein 分次平坦模的等价刻画．最后利用遗忘函子 U 和它的右伴随函子F 讨论了分次FC 环上Gorenstein平坦模和Gorenstein分次平坦模之间的关系．然而，Gorenstein分次平坦模的类是否关于扩张封闭，到现在为止还是未知的．受以上工作的启发，本文证明了 Gorenstein 分次平坦模类为投射可解类当且仅当它是扩张封闭的．我们还引入了左分次 GF- 封闭环，刻画了此环上 Gorenstein 分次平坦模的一些性质．

1　预备知识

本文中，所有环都是具有单位元的结合环，所有的模均是酉模．R-gr 表示所有分次左 R- 模构成的范畴．令 M 和 N 是分次左R- 模．我们用 $\mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M, N)=\{f: f\in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 且 $\mathrm{f}(M_\sigma)\subseteq N_\sigma, \sigma\in G\}$ 表示 R-gr 中从 M 到 N 的所有态射．如果对所有 $\sigma\in G$，$f(M_\sigma)\subseteq N_{\sigma\tau}$，则称 R- 线性映射 $f: M\longrightarrow N$ 是度为 τ 的分次态射，其中 $\tau\in G$．度为 τ 的分次态射构成了$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 的加法子群$\mathrm{HOM}_R(M, N)_\tau$．易知 $\mathrm{HOM}_R(M, N)_e=\mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M, N)$．故$\mathrm{Hom}_R(M, N)=\bigoplus_{\tau\in G}\mathrm{HOM}_R(M, N)_\tau$ 是分次阿贝尔群．对任意的 $i>0$，我们用$\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$，$\mathrm{Ext}^i_{R\text{-gr}}(M, N)$，$\mathrm{EXT}^i_R(M, N)$ 分别表示$\mathrm{Hom}_R(M, N)$，$\mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(M, N)$ 和 $\mathrm{HOM}_R(M, N)$ 的右导出函子．

设 M 是分次右R- 模，N 是分次左R- 模．M 与 N 的分次张量积为 $M\otimes_R N=\bigoplus_{\sigma\in G}(M\otimes_R N)_\sigma$，其中 $x\otimes_R y\in(M\otimes_R N)_\sigma(x\in M_\alpha, y\in N_\beta)$ 且 $\alpha\beta=\sigma$．我们用 $\mathrm{Tor}^R_i(M, N)$ 表示 $M\otimes_R N$ 的左导出函子．设 M 是分次右 R- 模，$M^+=\mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 表示 M 的分次示性模．

文中未解释的概念和符号，请参见文献[4-9]．

定义 1[4]　R-gr 中的平坦对象称为平坦分次模．R-gr 中的内射对象称为分次内射模．

① 收稿日期：2018－11－23

基金项目：国家自然科学基金项目(11761060)．

作者简介：毛海玲(1994－)，女，硕士研究生，主要从事环的同调理论的研究．

定义 2[3]　如果在 R-gr 中存在分次平坦左 R- 模的正合列 $\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}(F^0 \longrightarrow F^1)$，且对任意分次内射右 R- 模 I，$I \otimes_R$- 作用序列正合，则称 M 是 Gorenstein 分次平坦模.

定义 3[2]　设 x 是 R-gr 的子范畴. 令 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是 R-gr 中的短正合列.

(i) 如果 A 和 C 在 x 中，有 B 也在 x 中，则称 x 关于扩张封闭；

(ii) 如果 B 和 C 在 x 中，有 A 也在 x 中，则称 x 关于满同态的核封闭；

(iii) 如果 x 满足以下 3 条，则称 x 是投射可解类：

(a) x 包含所有分次投射左 R- 模；

(b) x 关于扩张封闭；

(c) x 关于满同态的核封闭.

2　主要结果

定义 4　如果 gr-$\mathscr{GF}(R)$ 关于扩张封闭，则称分次环 R 是左分次 GF- 封闭环，其中 gr-$\mathscr{GF}(R)$ 表示所有 Gorenstein 分次平坦左 R- 模组成的类. 我们可以类似地定义右分次 GF- 封闭环.

引理 1　对分次左 R- 模，以下结论等价：

(i) M 是 Gorenstein 分次平坦模；

(ii) M 满足以下两条：

(a) 对任意的 $i > 0$ 及任意的分次内射右 R- 模 I，$\mathrm{Tor}_i^R(I, M) = 0$；

(b) 在 R-gr 中存在分次左 R- 模的正合序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots$，其中 F^i 是分次平坦模，且对任意分次内射右 R- 模 I，$I \otimes_R$- 作用序列正合.

(iii) 在 R-gr 中存在分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$，其中 F 是分次平坦模，G 是 Gorenstein 分次平坦模.

证　(i)⇒(ii) 因为 M 是 Gorenstein 分次平坦模，所以在 R-gr 中存在分次左 R- 模的正合序列 $\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中每个 F_i 是分次平坦模. 令 $L_n \cong \ker(F_{n-1} \longrightarrow F_{n-2})$，$L_0 = M$，且对任意分次内射右 R- 模 I，$I \otimes_R$- 作用序列正合. 考虑短正合列 $0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，我们得到如下交换图(图 1).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & I \otimes_R L_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & I \otimes_R F_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & I \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(I, M) \arrow[r] & I \otimes_R L_1 \arrow[r] & I \otimes_R F_0 \arrow[r] & I \otimes_R M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1　交换图

由分解引理知，$\mathrm{Tor}_1^R(I, M) = 0$. 当 $i > 0$ 时，由长正合序列

$$0 = \mathrm{Tor}_2^R(I, F_0) \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^R(I, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(I, L_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(I, F_0) = 0$$

得 $\mathrm{Tor}_2^R(I, M) \cong \mathrm{Tor}_1^R(I, L_1)$. 利用数学归纳法得到对任意 $i > 0$，有 $\mathrm{Tor}_i^R(I, M) = 0$.

由(i)，在 R-gr 上也存在分次左 R- 模的正合序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots$，其中 F^i 是分次平坦模，且对任意分次内射右 R- 模 I，$I \otimes_R$- 作用序列正合.

(ii)⇒(i) 因为 M 存在分次平坦分解 $\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中每个 F_i 是分次平坦模，且对任意分次内射右 R- 模 I，$\mathrm{Tor}_i^R(I, M) = 0$，则 $I \otimes_R$- 作用序列正合. 将 M 的平坦分解与(ii) 中正合列首尾相接，便得 R-gr 上分次平坦左 R- 模的正合列 $\mathbb{F}$：$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}(F^0 \longrightarrow F^1)$，其中 F_i, F^i 是分次平坦模，且对任意分次内射右 R- 模 I，$I \otimes_R \mathbb{F}$ 作用序列正合. 因此，M 是 Gorenstein 分次平坦模.

(i)⇒(iii) 显然.

(iii)⇒(ii) 设在 R-gr 中存在分次左 R- 模的短正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0 \tag{1}$$

其中 F 是分次平坦模，G 是 Gorenstein 分次平坦模．设 I 是分次内射右 R- 模，因为 G 是 Gorenstein 分次平坦模，所以对任意的 $i \geqslant 0$，由长正合列

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^{R}(I, G) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{i}^{R}(I, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{i}^{R}(I, F)$$

得到 $\mathrm{Tor}_{i}^{R}(I, M) = 0$.

因为 G 是 Gorenstein 分次平坦模，所以存在分次左 R- 模的正合序列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow F^{0} \longrightarrow F^{1} \longrightarrow \cdots \tag{2}$$

其中 F^{i} 是分次平坦模，且对任意分次内射右 R- 模 I，$I \otimes_{R}$- 作用序列正合．把序列(1) 和(2) 连接起来，得到序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow F^{0} \longrightarrow F^{1} \longrightarrow \cdots$，且对任意分次内射右 R- 模 I，$I \otimes_{R}$- 作用序列正合.

引理 2 设 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是 R-gr 中分次左 R- 模的短正合序列．如果 A 是 Gorenstein 分次平坦模，C 是分次平坦模，那么 B 是 Gorenstein 分次平坦模.

证 因为 A 是 Gorenstein 分次平坦模，所以在 R-gr 中存在分次左 R- 模的正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$，其中 F 是分次平坦模，G 是 Gorenstein 分次平坦模．考虑 $A \longrightarrow B$ 和 $A \longrightarrow F$ 的推出，如图 2 所示.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
& G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 2 $A \longrightarrow B$ 和 $A \longrightarrow F$ 的推出

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 3 $B \longrightarrow C$ 和 $B \longrightarrow F$ 的推出

在短正合列 $0 \longrightarrow F \longrightarrow F' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 中，因为 F 和 C 是分次平坦模，所以 F' 也是分次平坦模.

在短正合列 $0 \longrightarrow B \longrightarrow F' \longrightarrow G \longrightarrow 0$ 中，因为 F' 是分次平坦模，所以由引理 1 得，B 是 Goren-stein 分次平坦模.

定理 1 对分次环 R，以下结论等价：

(i) R 是左分次 GF- 封闭环；

(ii) gr-$GF(R)$ 是投射可解类；

(iii) 对 R-gr 分次左 R- 模短正合列 $0 \longrightarrow G_{1} \longrightarrow G_{0} \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 G_{1}，G_{0} 是 Goren-stein 分次平坦模．如果对任意分次内射右 R- 模 I，有 $\mathrm{Tor}_{1}^{R}(I, M) = 0$，那么 M 是 Gorenstein 分次平坦模.

证 (i)⇒(ii) 考虑分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$，其中 B 和 C 是 Gorenstein 分次平坦模，下面证明 A 是 Gorenstein 分次平坦模．因为 B 是 Gorenstein 分次平坦模，则在 R-gr 中存在分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$，其中 F 是分次平坦模，G 是 Gorenstein 分次平坦模．考虑 $B \longrightarrow C$ 和 $B \longrightarrow F$ 的推出，如图 3 所示．图 3 右侧垂直短正合列中，C 和 G 是 Gorenstein 分次平坦模．因为 R 是左分次 GF- 封闭环，所以 D 是 Gorenstein 分次平坦模．因此由中间水平短正合列及引理 2 知，A 是 Gorenstein 分次平坦模.

(i)⇒(iii) 因为 G_{1} 是 Gorenstein 分次平坦模，所以在 R-gr 中存在分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow G_{1} \longrightarrow F_{1} \longrightarrow H \longrightarrow 0$，其中 F_{1} 是分次平坦模，H 是 Gorenstein 分次平坦模．考虑 $G_{1} \longrightarrow F_{1}$ 和 $G_{1} \longrightarrow G_{0}$ 的推出，如图 4 所示．图 4 右侧垂直短正合列中，G_{0} 和 H 是 Gorenstein 分次平坦模．因为 R 是左分次 GF- 封闭环，所以 D 是 Gorenstein 分次平坦模．因此在 R-gr 中存在分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow D \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$，其中 F 是分次平坦模，G 是 Gorenstein 分次平坦模.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & H \arrow[r, equal] \arrow[d] & H \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 4　$G_1 \longrightarrow F_1$ 和 $G_1 \longrightarrow G_0$ 的推出

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 5　$D \longrightarrow F$ 和 $D \longrightarrow M$ 的推出

考虑 $D \longrightarrow F$ 和 $D \longrightarrow M$ 的推出，如图 5 所示. 下面证明 F' 是分次平坦模. 考虑短正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow F' \longrightarrow G \longrightarrow 0$. 设 I 是分次内射右 R- 模. 由长正合序列

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(I, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(I, F') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(I, G) = 0$$

我们得到 $\mathrm{Tor}_1^R(I, F') = 0$.

考虑短正合序列 $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F \longrightarrow F' \longrightarrow 0$. 得短正合列 $0 \longrightarrow (F')^+ \longrightarrow F^+ \longrightarrow (F_1)^+ \longrightarrow 0$. 因为 F 和 F_1 是分次平坦左 R- 模，所以由文献[10]的引理 2.1 和定理 3.5 知，F^+ 和 $(F_1)^+$ 是分次内射右 R- 模. 由 $\mathrm{Tor}_1^R(I, F') = 0$ 及文献[11]的引理 2.1 得

$$\mathrm{EXT}_R^1((F_1)^+, (F')^+) \cong \mathrm{Tor}_1^R((F_1)^+, F')^+ = 0$$

因此序列 $0 \longrightarrow (F')^+ \longrightarrow F^+ \longrightarrow (F_1)^+ \longrightarrow 0$ 可裂. 故 $(F')^+$ 是分次内射右 R- 模 F^+ 的直和项，所以 $(F')^+$ 是分次内射右 R- 模. 由文献[10]的引理 2.1 和定理 3.5 知，F' 是分次平坦左 R- 模. 在短正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow F' \longrightarrow G \longrightarrow 0$ 中，由引理 1 知，M 是 Gorenstein 分次平坦模.

(iii)⇒(i) 考虑 R-gr 中分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$，其中 A 和 C 是 Gorenstein 分次平坦模，下面证明 B 是 Gorenstein 分次平坦模. 设 I 是分次内射右 R- 模. 用 $I \otimes_R$- 作用短正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$，得到长正合序列

$$\mathrm{Tor}_i^R(I, A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(I, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(I, C)$$

因为 A 和 C 是 Gorenstein 分次平坦模，所以由引理 2 知，对任意的 $i > 0$，有 $\mathrm{Tor}_i^R(I, B) = 0$. 因为 C 是 Gorenstein 分次平坦模，所以在 R-gr 中存在分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow 0$，其中 F 是分次平坦模，G 是 Gorenstein 分次平坦模. 考虑 $F \longrightarrow C$ 和 $B \longrightarrow C$ 的拉回，如图 6 所示. 因为 A 是 Gorenstein 分次平坦模，所以在 R-gr 中存在分次左 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow F' \longrightarrow G' \longrightarrow 0$，其中 F' 是分次平坦模，G' 是 Gorenstein 分次平坦模.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 6　$F \longrightarrow C$ 和 $B \longrightarrow C$ 的拉回

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & D' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] & 0 \\
 & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 7　$A \longrightarrow F'$ 和 $A \longrightarrow D$ 的拉回

考虑 $A \longrightarrow F'$ 和 $A \longrightarrow D$ 的拉回，如图7所示. 图7中间水平短正合列中，因为 F' 和 F 是分次平坦模，所以 D 是分次平坦模. 由右侧垂直短正合列及引理2知，D 是Gorenstein分次平坦模. 最后，我们考虑短正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow D \longrightarrow B \longrightarrow 0$. 因为 G 和 D 是Gorenstein分次平坦模，且对任意的 $i > 0$ 及任意的分次内射右 R-模 I，$\mathrm{Tor}_1^R(I, M) = 0$. 所以由(iii)知，$B$ 是Gorenstein分次平坦模. 故 R 是 GF-封闭环.

推论1 设 R 是左分次 GF-封闭环，那么 gr-$\mathscr{GF}(R)$ 关于分次直和项封闭.

证 因为 gr-$\mathscr{GF}(R)$ 是投射可解类，所以由文献[12]的命题1.4知，只需说明 gr-$\mathscr{GF}(R$-) 关于分次直和封闭即可. 由文献[3]的推论2.11知结论成立.

参考文献:

[1] DING N Q, CHEN J L. Coherent Ring with Finite Self-FP Injective Dimension [J]. Comm Algebra, 1996, 24(9): 2963-2980.

[2] BENNIS D. Rings Over Which the Class of Gorenstein Flat Modules is Closed Under Extensions [J]. Comm Algebra, 2009, 37(3): 855-868.

[3] ASENSIO M J, L'OPEZ-RAMOS J A, TORRECILLAS B. Gorenstein gr-Flat Modules [J]. Comm Algebra, 1998, 26(10): 3195-3209.

[4] NASTASESCU C, VAN OYSTAEYEN F. Graded Ring Theory [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982: 1-15.

[5] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2000: 239-258.

[6] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York: Academic Press, 1979: 84-93.

[7] 叶星美, 杨晓燕. n-强 F-Gorenstein投射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(10): 84-88.

[8] 陈文静, 杨晓燕. 强和强泛Gorenstein FP-内射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(8): 75-78.

[9] 李倩倩, 杨晓燕. n-强Gorenstein AC投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(12): 36-40.

[10] ASENSIO M J, L'OPEZ-RAMOS J A, TORRECILLA B. FP-gr-Injective Modules and gr-FC-Rings [J]. Algebra Number Theory Marcel Dekker, 1999, 1999: 1-11.

[11] GARCIA-ROZAS J R, L'OPEZ-RAMOS J A, TORRECILLAS B. On the Existence of Flat Covers in R-gr [J]. Comm. Algebra, 2000, 29(8): 3341-3349.

[12] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. J Pure Appl Algebra, 2004, 189 (1): 167-193.

On Gorenstein Graded Flat Module of Left Graded *GF*-Closed Ring

MAO Hai-ling, YANG Xiao-yan

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let Rbe a graded ring. We prove that the class of Gorenstein graded flat modules is projectively resolving class if and only if it is closed under extension. We also introduce the concept of left graded *GF*-closed rings, some properties of Gorenstein graded flat modules over this graded ring are given.

Key words: Gorenstein graded flat module; projectively resolving class; left graded *GF*-closed ring

责任编辑 廖 坤