DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.08.005

2 类图完美匹配计数公式的嵌套递推求法①

唐保祥[1]，　任　韩[2]

1. 天水师范学院 数学与统计学院，甘肃 天水 741001；2. 华东师范大学 数学系，上海 200062

摘要：把图 $2-nD_8$ 和 $2-nD_6$ 的完美匹配按饱和某个顶点的完美匹配进行分类，求出每一类完美匹配数目的递推关系式，再利用这些递推式之间的相互关系，得到这两类图的完美匹配数目的递推关系式，最后从递推式中解出这两类图的完美匹配数目的计算公式.

关　键　词：完美匹配；线性递推式；特征方程；通解

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2019)08-0023-05

图的完美匹配计数理论在很多领域有广泛的应用，其中的计数思想和方法对组合数学产生了重要影响，因此受到众多学者的关注[1-16]. 本文用嵌套递推方法给出了2类2-边连通图完美匹配数目的计算公式.

定义 1　设图 G 是有完美匹配的图，若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同，则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配.

定义 2　n 个 8 圈为 C_8^i：$u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}u_{i7}u_{i8}u_{i1}$. 分别连接圈 C_8^i 的顶点 u_{i1} 与 u_{i6}，u_{i2} 与 u_{i5}，u_{i3} 与 u_{i8}，u_{i4} 与 u_{i7}($i=1,2,\cdots,n$)，再将圈 C_8^i 和圈 C_8^{i+1} 顶点 u_{i3} 与 $u_{i+1,8}$，u_{i4} 与 $u_{i+1,7}$ 分别连接起来($i=1,2,\cdots,n-1$)，这样得到的图记为 $2-nD_8$，如图 1 所示.

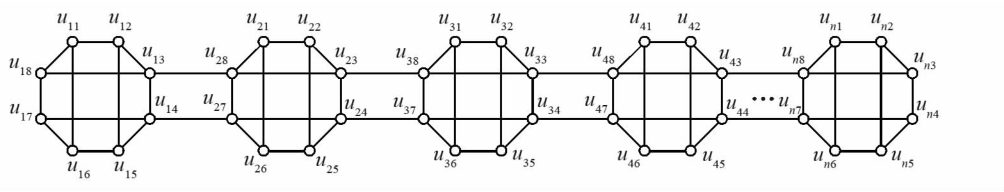

图 1　图 $2-nD_8$

定义 3　n 个 6 圈为 C_6^i：$u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}v_{i1}$. 分别连接圈 C_6^i 的顶点 u_{i1} 与 u_{i4}，u_{i2} 与 u_{i6}，u_{i3} 与 u_{i5}($i=1,2,\cdots,n$)，再将圈 C_6^i 和圈 C_6^{i+1} 顶点 u_{i2} 与 $u_{i+1,6}$，u_{i3} 与 $u_{i+1,5}$ 分别连接起来($i=1,2,\cdots,n-1$)，这样得到的图记为 $2-nD_6$，如图 2 所示.

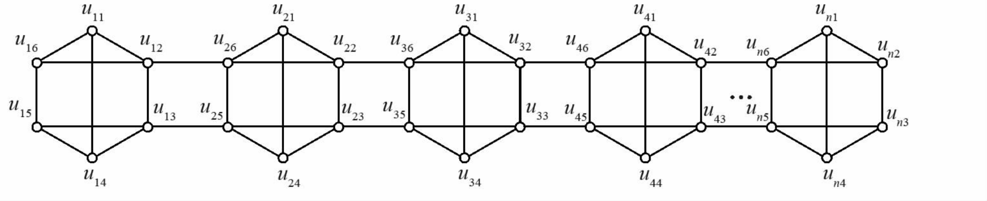

图 2　图 $2-nD_6$

定理 1　设图 $2-nD_8$ 的完美匹配数记为 $f(n)$，则

---

① 收稿日期：2018-09-10

基金项目：国家自然科学基金项目(11171114).

作者简介：唐保祥(1961-)，男，教授，主要从事图论和组合数学的研究.

$$f(n)=\frac{85+7\sqrt{85}}{170}\left(\frac{11+\sqrt{85}}{2}\right)^{n}+\frac{85-7\sqrt{85}}{170}\left(\frac{11-7\sqrt{85}}{2}\right)^{n}$$

证　易知图 $2-nD_8$ 有完美匹配. 为了求函数 $f(n)$ 的解析式，先定义图 G_1，并求其完美匹配的数目. 将路 v_1v_2 的端点 v_1 和 v_2 分别与图 $2-nD_8$ 的顶点 u_{18} 和 u_{17} 各连接一条边，所得到的图记为 G_1，如图 3 所示.

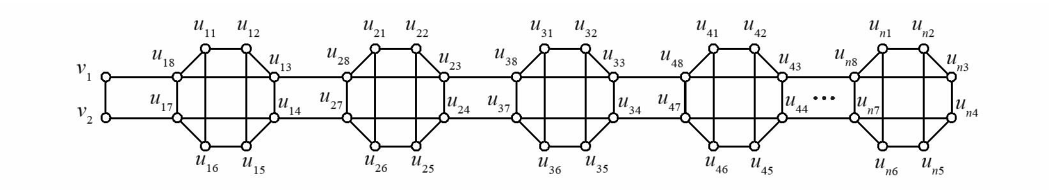

图 3　图 G_1

易知图 G_1 有完美匹配，设 $g(n)$ 表示图 G_1 的完美匹配的数.

先求 $g(n)$ 的表达式. 设图 G_1 完美匹配的集合为 M，G_1 含边 v_1v_2，v_1u_{18} 的完美匹配集合分别为 M_1，M_2，则 $M_1\cap M_2=\varnothing$，$M=M_1\cup M_2$，$g(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$.

求 $|M_1|$. 因为 $v_1v_2\in M_1$，所以 v_1u_{18}，$v_2u_{17}\notin M_1$. 由 $f(n)$ 的定义知，$|M_1|=f(n)$.

求 $|M_2|$. 由 $g(n)$ 的定义知，M_2 中包含边 v_1u_{18}，v_2u_{17}，$u_{11}u_{12}$，$u_{15}u_{16}$ 的完美匹配数为 $g(n-1)$；

由 $g(n)$ 的定义知，M_2 中包含边 v_1u_{18}，v_2u_{17}，$u_{11}u_{16}$，$u_{12}u_{15}$ 的完美匹配数为 $g(n-1)$；

由 $f(n)$ 的定义知，M_2 中包含边 v_1u_{18}，v_2u_{17}，$u_{11}u_{16}$，$u_{12}u_{13}$，$u_{14}u_{15}$ 的完美匹配数为 $f(n-1)$.

M_2 中上述 3 类完美匹配互不包含，互不相交，且穷尽了 M_2 中所有完美匹配，故

$$|M_2|=2g(n-1)+f(n-1)$$

综上所述，就有

$$g(n)=f(n)+f(n-1)+2g(n-1)\tag{1}$$

再求 $f(n)$. 设图 $2-nD_8$ 完美匹配的集合为 $M^{(1)}$，图 $2-nD_8$ 含边 $u_{11}u_{18}$，$u_{18}u_{13}$，$u_{18}u_{17}$ 的完美匹配集合分别为 M_3，M_4，M_5，则 $M_i\cap M_j=\varnothing(3\leqslant i<j\leqslant 5)$，$M^{(1)}=M_3\cup M_4\cup M_5$，$f(n)=|M^{(1)}|=|M_3|+|M_4|+|M_5|$.

求 $|M_3|$. 由 $f(n)$ 的定义知，M_3 中包含边 $u_{11}u_{18}$，$u_{12}u_{13}$，$u_{14}u_{17}$，$u_{15}u_{16}$ 的完美匹配数为 $f(n-1)$；

由 $g(n)$ 的定义知，M_3 中包含边 $u_{11}u_{18}$，$u_{17}u_{16}$，$u_{12}u_{15}$ 的完美匹配数为 $g(n-1)$；

由 $f(n)$ 的定义知，M_3 中包含边 $u_{11}u_{18}$，$u_{17}u_{16}$，$u_{12}u_{13}$，$u_{14}u_{15}$ 的完美匹配数为 $f(n-1)$.

M_3 中上述 3 类完美匹配互不包含，互不相交，且穷尽了 M_3 中所有完美匹配，故

$$|M_3|=2f(n-1)+g(n-1)$$

求 $|M_4|$. 由 $f(n)$ 的定义知，M_4 中包含边 $u_{11}u_{12}$，$u_{13}u_{18}$，$u_{16}u_{17}$，$u_{14}u_{15}$ 的完美匹配数为 $f(n-1)$；

由 $f(n)$ 的定义知，M_4 中包含边 $u_{13}u_{18}$，$u_{14}u_{17}$，$u_{11}u_{16}$，$u_{12}u_{15}$ 的完美匹配数为 $f(n-1)$；

由 $f(n)$ 的定义知，M_4 中包含边 $u_{13}u_{18}$，$u_{14}u_{17}$，$u_{11}u_{12}$，$u_{15}u_{16}$ 的完美匹配数为 $f(n-1)$.

M_4 中上述 3 类完美匹配互不包含，互不相交，且穷尽了 M_4 中所有完美匹配，故

$$|M_4|=3f(n-1)$$

求 $|M_5|$. 由 $g(n)$ 的定义知，M_5 中包含边 $u_{11}u_{12}$，$u_{15}u_{16}$，$u_{17}u_{18}$ 的完美匹配数为 $g(n-1)$；

由 $g(n)$ 的定义知，M_5 中包含边 $u_{17}u_{18}$，$u_{11}u_{16}$，$u_{12}u_{15}$ 的完美匹配数为 $g(n-1)$；

由 $f(n)$ 的定义知，M_5 中包含边 $u_{17}u_{18}$，$u_{11}u_{16}$，$u_{12}u_{13}$，$u_{14}u_{15}$ 的完美匹配数为 $f(n-1)$.

M_5 中上述 3 类完美匹配互不包含，互不相交，且穷尽了 M_5 中所有完美匹配，故

$$|M_5|=f(n-1)+2g(n-1)$$

综上所述，有

$$f(n)=6f(n-1)+3g(n-1)\tag{2}$$

把(1) 式代入(2) 式，得

$$f(n)=9f(n-1)+3f(n-2)+6g(n-2)\tag{3}$$

由(1)式，得

$$2f(n-1)=12f(n-2)+6g(n-2) \tag{4}$$

由(3)－(4)式，得

$$f(n)=11f(n-1)-9f(n-2) \tag{5}$$

如图 4 知，$f(1)=9$.

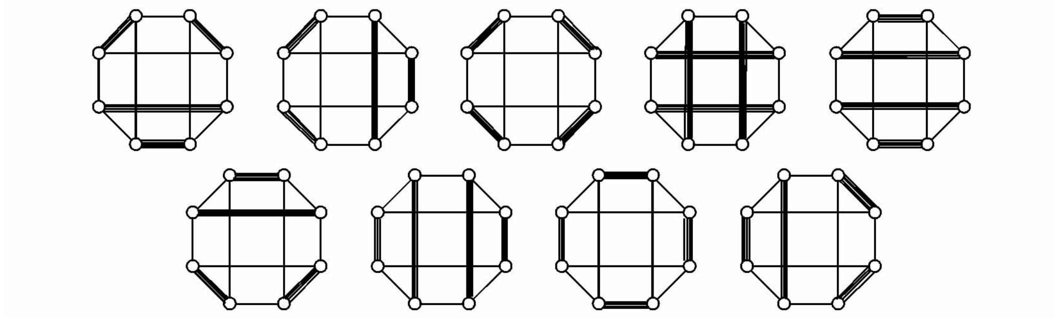

图 4　图 G_2

如图 5 知，$g(1)=12$.

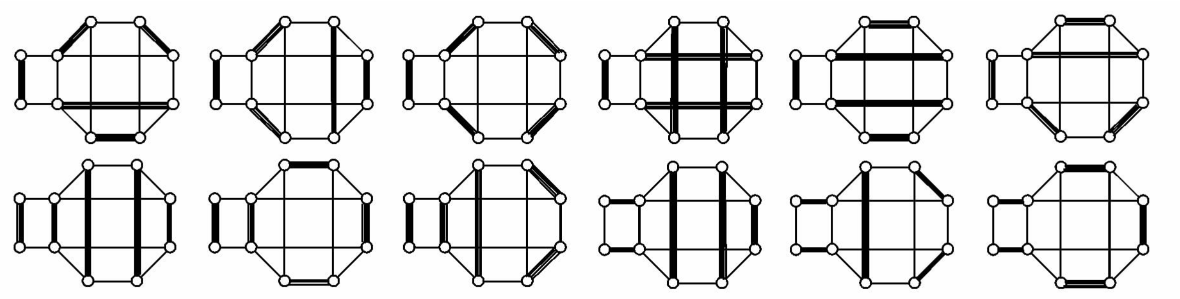

图 5　图 G_3

由(1)式，得

$$f(2)=6f(1)+3g(1)=90$$

线性递推式(5)的特征方程为 $x^2-11x+9=0$，特征根为 $x=\frac{11\pm\sqrt{85}}{2}$. 故(5)式的通解为

$$f(n)=c_1\left(\frac{11+\sqrt{85}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{11-7\sqrt{85}}{2}\right)^n$$

所以(5)式满足 $f(1)=9$，$f(2)=90$ 的解为

$$f(n)=\frac{85+7\sqrt{85}}{170}\left(\frac{11+\sqrt{85}}{2}\right)^n+\frac{85-7\sqrt{85}}{170}\left(\frac{11-7\sqrt{85}}{2}\right)^n$$

定理 2　设图 $2-nD_6$ 的完美匹配数记为 $\sigma(n)$，则 $\sigma(n)=4\cdot 5^{n-1}$.

证　易知图 $2-nD_6$ 有完美匹配. 为了求函数 $\sigma(n)$ 的解析式，先定义图 G_4，并求其完美匹配的数目. 将长为 1 的路 v_1v_2 的端点 v_1 和 v_2 分别与图 $2-nD_6$ 的顶点 u_{16} 和 u_{15} 各连接一条边，所得到的图记为 G_4，如图 6 所示.

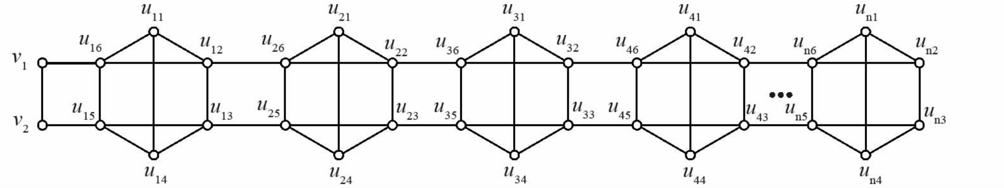

图 6　图 G_4

易知图 G_4 有完美匹配，设 $\tau(n)$ 表示图 G_4 的完美匹配数. 设图 G_4 完美匹配的集合为 $M^{(2)}$，G_4 含边 v_1v_2，v_1u_{16} 的完美匹配集合分别为 M_6，M_7，则 $M_6\cap M_7=\varnothing$，$M^{(2)}=M_6\cup M_7$，$\tau(n)=|M^{(2)}|=|M_6|+|M_7|$.

求 $|M_6|$. 因为 $v_1v_2 \in M_6$，所以由 $\sigma(n)$ 的定义知，$|M_6| = \sigma(n)$.

求 $|M_7|$. 由 $\tau(n)$ 的定义知，M_7 中包含边 $v_1u_{16}, v_2u_{15}, u_{11}u_{14}$ 的完美匹配数为 $\tau(n-1)$；

由 $\sigma(n)$ 的定义知，M_7 中包含边 v_1u_{16}，v_2u_{15}，$u_{11}u_{12}$，$u_{13}u_{14}$ 的完美匹配数为 $\sigma(n-1)$.

M_7 中上述 2 类完美匹配互不包含，互不相交，且穷尽了 M_7 中所有完美匹配，故

$$|M_7| = \sigma(n-1) + \tau(n-1)$$

综上所述，有

$$\tau(n) = \sigma(n) + \sigma(n-1) + \tau(n-1) \tag{6}$$

再求 $\sigma(n)$. 设图 $2-nD_6$ 的完美匹配的集合为 $M^{(3)}$，图 $2-nD_6$ 含边 $u_{11}u_{16}, u_{12}u_{16}, u_{15}u_{16}$ 的完美匹配集合分别为 M_8, M_9, M_{10}，则 $M_i \cap M_j = \varnothing(8 \leqslant i < j \leqslant 10)$，$M^{(3)} = M_8 \cup M_9 \cup M_{10}$，$\sigma(n) = |M^{(3)}| = |M_8| + |M_9| + |M_{10}|$.

求 $|M_8|$. 因为 $u_{11}u_{16}, u_{14}u_{15} \in M_8$，所以由 $\tau(n)$ 的定义知，$|M_8| = \tau(n-1)$.

求 $|M_9|$. 因为 $u_{12}u_{16}, u_{13}u_{15}, u_{11}u_{14} \in M_8$，所以由 $\sigma(n)$ 的定义知，$|M_9| = \sigma(n-1)$.

求 $|M_{10}|$. 由 $\tau(n)$ 的定义知，M_{10} 含边 $u_{15}u_{16}, u_{11}u_{14}$ 的完美匹配数为 $\tau(n-1)$；

由 $\sigma(n)$ 的定义知，M_{10} 含边 $u_{15}u_{16}, u_{11}u_{12}, u_{13}u_{14}$ 的完美匹配数为 $\sigma(n-1)$.

M_{10} 中上述 2 类完美匹配互不包含，互不相交，且穷尽了 M_{10} 中所有完美匹配，故

$$|M_{10}| = \sigma(n-1) + \tau(n-1)$$

综上所述，有

$$\sigma(n) = 2\sigma(n-1) + 2\tau(n-1) \tag{7}$$

把(6) 式代入(7) 式，得

$$\sigma(n) = 4\sigma(n-1) + 2\sigma(n-2) + 2\tau(n-2) = 5\sigma(n-1) \tag{8}$$

如图 7 知，$\sigma(1) = 4$.

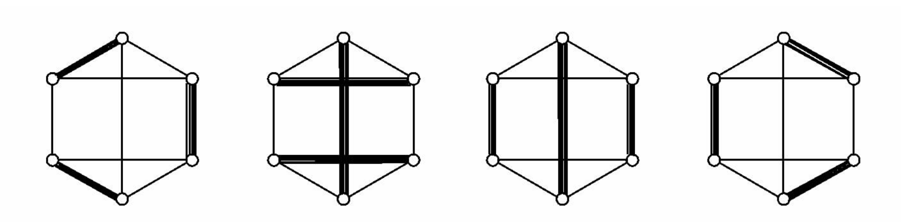

图 7 图 G_5

故(8) 式满足 $\sigma(1) = 4$ 的解为

$$\sigma(n) = 4 \cdot 5^{n-1}$$

参考文献：

[1] Valiant L G. The Complexity of Computing the Permanent [J]. Theoretical Compute Science, 1979, 8(2): 189-201.

[2] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching Theory [M]. New York : North-Holland Press, 1986.

[3] ZHANG H P. The Connectivity of Z-Transformation Graphs of Perfect Matchings of Polyominoes [J]. Discrete Mathematics, 1996, 158(1-3): 257-272.

[4] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of Perfect Matchings of a Type of Cartesian Products of Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154(1): 145-157.

[5] LI S L, YAN W G. The Matching Energy of Graphs with Given Parameters [J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 162: 415-420.

[6] DONG F M, YAN W G, ZHANG F J. On the Number of Perfect Matchings of Line Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161(6): 794-801.

[7] CHANG A, SHIU W C. On the k^{th} Eigenvalues of Trees with Perfect Matchings [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2007, 9(1): 321-332

[8] 唐保祥，任 韩. 2 类偶图完美匹配的数目 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, 34(10): 91-95.

［9］ 唐保祥，任　韩．3 类特殊图完美对集数的计算［J］．南开大学学报(自然科学版)，2014，47(5)：11-16.
［10］ 唐保祥，任　韩．4 类图完美匹配的计数［J］．武汉大学学报(理学版)，2012，58(5)：441-446.
［11］ 唐保祥，任　韩．几类特殊图完美匹配数目的递推求法［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(2)：9-13.
［12］ 唐保祥，任　韩．两类图完美匹配的计数公式［J］．吉林大学学报(理学版)，2016，54(4)：790-792 .
［13］ 唐保祥，任　韩．2 类图完美匹配数目的解析式［J］．中山大学学报(自然科学版)，2016，55(4)：15-17.
［14］ 唐保祥，任　韩．2 类特殊图中的完美匹配数［J］．浙江大学学报(理学版)，2017，44(3)：266-269.
［15］ 黄丽娜，李沐春，刘海忠．图的邻点可区别 V-全色数的一个上界［J］．西南大学学报(自然科学版)，2017，39(12)：81-85.
［16］ 王文霞．无向无权图同构判别算法［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(3)：141-145.

Two Types of Nested Recursive Methods for Finding Counting Formulas of Perfect Matching Number

TANG Bao-xiang[1]，　REN　Han[2]

1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui Gansu 741001, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China

Abstract: The perfect matching of graphs $2-nD_8$ and $2-nD_6$ has been classified according to the perfect matching of a certain vertex of saturation, and the recursive relation of each kind of perfect matching number been obtained. Then the interrelationship between these recursive formulas has been used to eliminate those that are not needed. The recursive relation has been used to obtain the recursive relation of the perfect matching number of the two kinds of graphs. Finally, the formula for calculating the perfect matching number of the two graphs has been solved from the recursive formula.

Key words: perfect matching; linear recurrence relation; characteristic equation; general solution

责任编辑　廖　坤