DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2019.08.006

链路意义下网络抗毁性的一种新刻画①

王青宁，　李银奎

青海民族大学 数学与统计学院，西宁 810007

摘要：随着元器件性能的大幅提高，网络故障多因链路受阻或破坏所引发，为了更好地刻画和分析网络抗毁性，从链路角度引入新的连通性参数——图的边毁裂度．运用组合优化和类比分析方法研究并给出了若干具有特殊结构的图的边毁裂度的计算公式和一般图的边毁裂度的界，同时讨论了图的边毁裂度与其它参数的关系，并举例表明结果是最好的．

关 键 词：边毁裂度；单圈图；双圈图；完全图；网络抗毁性

中图分类号：O157.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2019)08－0028－06

信息科学与互联网技术的迅猛发展促使各种网络相互交织形成一个庞大的信息服务系统，然而随着网络结构和网络环境的日益复杂，故障时有发生且后果愈加严重．研究表明，内部设施或组织失效导致的网络故障的几率随着网络硬件技术的提高而逐步降低，但自然灾害或人为破坏造成的重大事故却呈现上升趋势，且是大面积、结伴连锁发生的．为了减少网络故障，降低危害，在网络结构的设计、建造及维护中提高网络可靠性、稳定性和抗毁性成了目前学界理论研究的一个重要课题[1-2]．

网络从本质上讲，就是一种抽象意义上的结构，一般用加权连通图来描述，常用 $N=(V, E, W)$ 表示，其中 V,E,W 分别代表网络的节点集、边集和权集．当 W 是一个常值映射时，网络就是非赋权图 $N=(V, E)$．为了研究方便，我们对图 $G=(V, E)$ 和网络 $N=(V, E)$ 不加严格区分．通常用图 G 的顶点集 $V(G)$ 表示通信站点集，用边集 $E(G)$ 表示两个通信站之间的通信线路集．显然，网络的抗毁性与其对应的图的连通性有十分密切的关系[3-5]．一般来讲，一个图的连通性越好，它代表的网络抗毁性就越强[6-8]．一般认为，在分析图结构连通性的过程中，常常被重点考虑的维度有 3 个：(1) 破坏图的连通性所需移除的元素个数(点数或边数)；(2) 移除相关元素后图中连通分支的个数；(3) 移除相关元素后图中最大连通分支所含顶点的个数．随着元器件性能的大幅提高，网络故障多因链路受阻或破坏所引发，受文献[9]的启发，本文引入了图 G 的边毁裂度

$$\gamma'(G)=\max\{\omega(G-S)-|S|-m(G-S): S\subset E(G), \omega(G-S)>1\}$$

其中 $m(G-S)$ 和 $\omega(G-S)$ 分别表示 $G-S$ 中的连通分支数目和最大分支的阶数．通过对边毁裂度的系统讨论，得到了一些基本结果，最后讨论了图的边毁裂度与其它参数的关系．

本文只考虑无环无重边的有限无向图，相关术语和定义见文献[10]．

1 主要结果

图的边毁裂度作为描述图的连通性的又一参数，是通过讨论网络链路受损程度和恢复难度来刻画网络

① 收稿日期：2018－08－13

基金项目：国家自然科学基金项目(11661066，11561056)；青海省基础应用研究项目(2017-ZJ-701，2016-ZJ-914)；青海民族大学自然科学基金项目(2018XJY02，2019XJG10)．

作者简介：王青宁(1968－)，男，副教授，主要从事图论及其应用的研究．

抗毁性的重要参数之一．下面围绕一些重要图类展开相关讨论．

定理 1　设 G 为 p 阶非完全图，则：

（ⅰ）$\gamma'(G) \leqslant 0$；

（ⅱ）$\gamma'(G) \geqslant p - |E(G)| - 1$；

（ⅲ）$\gamma'(G) \geqslant 3 - \lambda(G) - p$；

（ⅳ）$\gamma'(G) \geqslant 3 - \delta(G) - p$.

证　（ⅰ）设 S 为 G 的任一边割集，令 $|S| = r \geqslant 1$，则 $\omega(G-S) \leqslant r+1$ 且 $m(G-S) \geqslant 1$. 因此

$$\omega(G-S) - |S| - m(G-S) \leqslant r+1-r-1 = 0$$

由边毁裂度的定义有 $\gamma'(G) \leqslant 0$.

（ⅱ）设 S 为 G 的边集 $E(G)$，则 $|S| = |E(G)|$，那么 $\omega(G-S) = p$ 且 $m(G-S) = 1$. 因此

$$\omega(G-S) - |S| - m(G-S) = p - |E(G)| - 1$$

由边毁裂度的定义有 $\gamma'(G) \geqslant p - |E(G)| - 1$.

（ⅲ）设 S 为 G 的最小边割集，则 $|S| = \lambda(G)$，$\omega(G-S) \geqslant 2$，$m(G-S) \leqslant p-1$. 因此

$$\omega(G-S) - |S| - m(G-S) \geqslant 3 - \lambda - p$$

所以由边毁裂度的定义有 $\gamma'(G) \geqslant 3 - \lambda - p$.

（ⅳ）注意到 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$，由（ⅲ）直接可得（ⅳ）成立.

定理 2　设 G 是 p 阶单圈图，则 $\gamma'(G) = -1$.

证　首先，由定理 1（ⅱ），有 $\gamma'(G) \geqslant p - |E(G)| - 1 = -1$. 设 S 是 G 的任一边割集且 C_k 为 G 中的唯一圈，下面估计数值 $\omega(G-S) - |S| - m(G-S)$.

如 $S \cap E(C_k) = \varnothing$，则 $\omega(G-S) \leqslant |S|+1$ 且 $m(G-S) \geqslant 3$. 因此

$$\omega(G-S) - |S| - m(G-S) \leqslant -2 < -1$$

如 $S \cap E(C_k) \neq \varnothing$，则 $\omega(G-S) \leqslant |S|$ 且 $m(G-S) \geqslant 1$. 因此

$$\omega(G-S) - |S| - m(G-S) \leqslant -1$$

这表明：对于 G 的任一边割集 S，总有 $\omega(G-S) - |S| - m(G-S) \leqslant -1$. 从而有 $\gamma'(G) \leqslant -1$.

因此 $\gamma'(G) = -1$.

定理 3　p 阶连通图 G 是树当且仅当 $\gamma'(G) = 0$.

证　首先，假设 G 是 p 阶树. 根据定理 1(ⅰ)，有 $\gamma'(G) \leqslant 0$. 根据定理 1(ⅱ)，有 $\gamma'(G) \geqslant p-q-1 = 0$. 即有 $\gamma'(G) = 0$.

其次，假设 $|V(G)| = p$，$|E(G)| = q$ 且 $\gamma'(G) = 0$. 根据定理 1(ⅱ)，有 $p-q-1 \leqslant 0$. 事实上，$p-q-1 = 0$. 反之，假设 $p-q-1 < 0$，考虑到 G 的连通性，则 G 中含圈. 再由定理 2 的证明可知 $\gamma'(G) \leqslant -1$，矛盾. 所以有 $p-q-1 = 0$，即 G 是树.

定理 4　设 G 是 p 阶双圈图. 则 $\gamma'(G) = -2$.

证　首先，取 $S_0 = E(G)$，即 $|S_0| = |E(G)| = q = p+1$，此时 $\omega(G-S_0) = P$ 且 $m(G-S_0) = 1$. 因此

$$\omega(G-S_0) - |S_0| - m(G-S_0) = p-q-1 = -2$$

所以有 $\gamma'(G) \geqslant -2$.

下面分情形证明 $\gamma'(G) \leqslant -2$. 设 S 是图 G 的任一边割集，C_k 和 C_s 是 G 的两个圈.

情形 1　若 $S \cap E(C_k \cup C_s) = \varnothing$，则 $\omega(G-S) \leqslant |S|+1$，且 $m(G-S) \geqslant 3$. 因此

$$\omega(G-S) - |S| - m(G-S) \leqslant -2$$

情形 2　若 $S \cap E(C_k) \neq \varnothing$ 但 $S \cap E(C_s) = \varnothing$，或者若 $S \cap E(C_k) = \varnothing$ 但 $S \cap E(C_s) \neq \varnothing$，均有 $\omega(G-S) \leqslant |S|$ 且 $m(G-S) \geqslant 3$. 因此

$$\omega(G-S) - |S| - m(G-S) \leqslant -3 < -2$$

情形 3　若 $S \cap E(C_k) \neq \varnothing$ 且 $S \cap E(C_s) \neq \varnothing$，则 $\omega(G-S) \leqslant |S|-1$，且有 $m(G-S) \geqslant 1$. 因此

$$\omega(G-S)-|S|-m(G-S)\leqslant -2$$

显然，对于 G 的任一边割集 S，总有 $\omega(G-S)-|S|-m(G-S)\leqslant -2$. 因此 $\gamma'(G)\leqslant -2$.

综上所述，有 $\gamma'(G)=-2$.

定理 5 设 G 是 $p(p\geqslant 2)$ 阶完全图，则

$$\gamma'(G)=\begin{cases} p-\dfrac{p(p-1)}{2}-1 & 2\leqslant p\leqslant 4 \\ 4-2p & 5\leqslant p \end{cases}$$

证 显然 $\gamma'(K_2)=0$，$\gamma'(K_3)=-1$. 至于 $G=K_4$，对于任一边割集 S，不难发现

$$\omega(G-S)-|S|-m(G-S)\in\{-4,-3\}$$

所以由定义有 $\gamma'(K_4)=-3$. 这些表明：对于 $2\leqslant p\leqslant 4$，有

$$\gamma'(K_p)=p-\frac{p(p-1)}{2}-1$$

下面考虑一般情形 $p\geqslant 5$.

一方面，由于K_p 的最小度为 $\delta(k)=p-1$，由定理 1(ⅳ) 有

$$\gamma'(G)\geqslant 3-(p-1)-p=4-2p$$

另一方面，设 S 是图G 的任一边割集，并设 $|S|=s$，则

$$p-1\leqslant s\leqslant \frac{p(p-1)}{2}$$

现在检查数值 $\omega(G-S)$ 和 $m(G-S)$：

通过观察，$\omega(G-S)$ 的值 ω 满足$(p-1)+(p-2)+\cdots+(p-\omega+1)=s$. 因此

$$\omega(G-S)\leqslant \frac{2p+1-\sqrt{4p^2-4p-8s+1}}{2}$$

显然，逐个破坏与各点关联的边是最好的破坏策略，从而有

$$m(G-S)\geqslant p+1-\frac{2p+1-\sqrt{4p^2-4p-8s+1}}{2}$$

因此

$$\begin{aligned}&\omega(G-S)-|S|-m(G-S)\leqslant\\&\frac{2p+1-\sqrt{4p^2-4p-8s+1}}{2}-s-\left(p+1-\frac{2p+1-\sqrt{4p^2-4p-8s+1}}{2}\right)=\\&2p+1-\sqrt{4p^2-4p-8s+1}-s-p-1=\\&p-s-\sqrt{4p^2-4p-8s+1}\end{aligned}$$

令

$$f(s)=p-s-\sqrt{4p^2-4p-8s+1}$$

因

$$f'(s)=\frac{4}{\sqrt{4p^2-4p-8s+1}}-1$$

当 $s=p-1$ 时，通过比较数值 $f(p-1)$ 和 $f\left(\dfrac{p(p-1)}{2}\right)$可知，$f(s)$ 最大值为 $f(p-1)=4-2p$. 即得 $r'(K_p)\leqslant 4-2p$.

通过以上分析，即得

$$\gamma'(G)=4-2p$$

定理 6 设 G 是完全二部图 $K_{s,t}(1\leqslant s\leqslant t)$，则

$$\gamma'(G)=\begin{cases} s+t-st-1 & s=1,2,3，且\ t\leqslant 4 \\ 3-2s-t & s=3，且\ t\geqslant 5\ 或\ 4\leqslant s\leqslant t \end{cases}$$

证 分两种情形证明：

情形 1　$s=1,2,3$ 且 $t\leqslant 4$.

首先，取 $S=E(G)$，即 $|S|=st$，$\omega(G-S)=s+t$ 且 $m(G-S)=1$. 所以有

$$\omega(G-S)-|S|-m(G-S)=(s+t)-st-1$$

由定义得 $\gamma'(G)\geqslant(s+t)-st-1$.

设 S 是图 G 的任一边割集，下面考察数值 $\omega(G-S)-|S|-m(G-S)$ 并讨论其最大值. 由完全二部图的结构知：有效边割 S 应满足 $|S|$ 是 s 的整数倍，不妨设 $|S|=sx$. 因此有

$$\begin{aligned}\omega(G-S)-|S|-m(G-S)&=\left[x+1+\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor(s-1)\right]-xs-\left\{s+t+1-\left[x+1+\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor(s-1)\right]\right\}=\\&2\left[x+1+\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor(s-1)\right]-xs-s-t-1=\\&(2-s)x+2(s-1)\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor-s-t+1\end{aligned}$$

下面讨论 $(2-s)x+2(s-1)\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor-s-t+1$ 的最大值，这里整数 x 满足 $1\leqslant x\leqslant t$.

显然，当 $s=1$ 时，函数 $f(x)=x-t$ 在 $[1,t]$ 上递增；当 $s=2$ 时，函数 $g(x)=2\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor-t-1$ 在 $[1,t]$ 上递增；当 $s=3$ 且 $t\leqslant 4$ 时，函数 $h(x)=4\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor-x-t-2$ 在 $[1,t]$ 上递增. 所以，当 $x=t$ 时，$\omega(G-S)-|S|-m(G-S)$ 取得最大为 $s+t-st-1$.

由定义有

$$\gamma'(G)\leqslant s+t-st-1$$

综上即证 $\gamma'(G)=(s+t)-st-1$.

情形 2　$s=3$，$t\geqslant 5$ 或 $4\leqslant s\leqslant t$.

首先，由于图 G 的最小度为 $\delta(G)=s$，根据定理 1(ⅳ) 可得

$$\gamma'(G)\geqslant 3-s-(s+t)=3-2s-t$$

设 S 是图 G 的任一边割集且 $|S|=s$. 类似于情形 1，考察数值 $\omega(G-S)-|S|-m(G-S)$ 并讨论其最大值. 同理可得

$$\omega(G-S)-|S|-m(G-S)=(2-s)x+2(s-1)\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor-s-t+1$$

整数 x 满足 $1\leqslant x\leqslant t$. 显然，当 $s=3$ 且 $t\geqslant 5$ 时，$\omega(G-S)-|S|-m(G-S)=-x+4\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor-2-t$ 在 $[1,t]$ 上递减；当 $4\leqslant s\leqslant t$ 时，$\omega(G-S)-|S|-m(G-S)=(2-s)x+2(s-1)\left\lfloor\frac{x}{t}\right\rfloor-s-t+1$ 在上 $[1,t]$ 递减. 所以，当 $x=1$ 时 $\omega(G-S)-|S|-m(G-S)$ 取得最大值为 $3-2s-t$. 即由定义有

$$\gamma'(G)\leqslant 3-2s-t$$

综上即证 $\gamma'(G)=3-2s-t$.

2　边毁裂度与其它边连通参数的关系

本节讨论边毁裂度与边完整度、边粘连度等其它边连通参数的关系.

定义 1[11]　图 G 的边完整度定义为

$$I'(G)=\min_{S\subseteq E(G)}\{|S|+m(G-S)\}$$

定义 2[12]　图 G 的边粘连度定义为

$$t'(G)=\min_{S\subseteq E(G)}\left\{\frac{|S|+m(G-S)}{\omega(G-S)}\mid\omega(G-S)>1\right\}$$

定理 7　设 G 是 $p(p\geqslant 2)$ 阶连通图. 若 G 的边完整度为 $I'(G)$，则

$$2-I'(G)\leqslant\gamma'(G)\leqslant p-I'(G)$$

证 设 S 是图 G 的任一边割集，则 $2 \leqslant \omega(G-S) \leqslant p$，因此

$$2-|S|-m(G-S) \leqslant \omega(G-S)-|S|-m(G-S) \leqslant p-m(G-S) \leqslant p-|S|-m(G-S)$$

因此

$$\max_{S \subseteq E(G)}\{2-|S|-m(G-S)\} \leqslant \max_{S \subseteq E(G)}\{\omega(G-S)-|S|-m(G-S)\} \leqslant \max_{S \subseteq E(G)}\{p-|S|-m(G-S)\}$$

这意味着

$$2-\min_{S \subseteq E(G)}\{|S|+m(G-S)\} \leqslant \max_{S \subseteq E(G)}\{\omega(G-S)-|S|-m(G-S)\} \leqslant p-\min_{S \subseteq E(G)}\{|S|+m(G-S)\}$$

因此

$$2-I'(G) \leqslant \gamma'(G) \leqslant p-I'(G)$$

注1 显然，定理7中的上、下界是最好可能的. 下界可在 $p(p \geqslant 2)$ 阶完全图 $G=K_p$ 上取得；上界可在星图 $G=K_{1,\,p-1}$ 上取得.

定理8 设 G 是 p 阶连通图. 若 $|E(G)|=q$，且 G 的边连通度、边粘连度分别为 $\kappa'(G)$，$t'(G)$，则

$$\frac{\kappa'+\sqrt{\kappa'2+4pt'(G)}}{2t'(G)}-q-1 \leqslant \gamma'(G) \leqslant \frac{q+1}{t'(G)}-2t'(G)$$

证 首先证明 $\gamma'(G) \leqslant \dfrac{q+1}{t'(G)}-2t'(G)$. 由边粘连度的定义有

$$t'(G) \leqslant \frac{|S|+m(G-S)}{\omega(G-S)}$$

考虑 G 连通性，有 $|S|+m(G-S) \leqslant q+1$. 则

$$t'(G) \leqslant \frac{q+1}{\omega(G-S)} \qquad |S|+m(G-S) \geqslant \omega(G-S)t'(G)$$

这说明 $\omega(G-S) \leqslant \dfrac{q+1}{t'(G)}$. 结合 $2 \leqslant \omega(G-S) \leqslant p$ 可得

$$\omega(G-S)-|S|-m(G-S) \leqslant \frac{q+1}{t'(G)}-\omega(G-S)t'(G) \leqslant \frac{q+1}{t'(G)}-2t'(G)$$

据边毁裂度的定义，有 $\gamma'(G) \leqslant \dfrac{q+1}{t'(G)}-2t'(G)$.

类似地，由 $\gamma'(G)$ 的定义有 $\gamma'(G) \geqslant \omega(G-S)-|S|-m(G-S)$，因此

$$\omega(G-S)-\gamma'(G) \leqslant |S|+m(G-S) \leqslant q+1$$

从而 $\omega(G-S) \leqslant q+1+\gamma'(G)$. 考虑到 $m(G-S) \geqslant \dfrac{p}{\omega(G-S)}$ 和 $|S| \geqslant \kappa'$，于是有

$$\frac{|S|+m(G-S)}{\omega(G-S)} \geqslant \frac{\kappa'+\dfrac{p}{\omega(G-S)}}{\omega(G-S)} \geqslant \frac{\kappa'+\dfrac{p}{q+1+\gamma'(G)}}{q+1+\gamma'(G)}$$

因此 $t'(G) \geqslant \dfrac{\kappa'+\dfrac{p}{q+1+\gamma'(G)}}{q+1+\gamma'(G)}$，即得

$$\gamma'(G) \geqslant \frac{\kappa'+\sqrt{\kappa'2+4pt'(G)}}{2t'(G)}-q-1$$

参考文献：

[1] BEINEKE L W, WRLKON R J. Topics in Structural Graph Theory [M]. Cambrige: Cambrige university Press, 2013.
[2] LI Y K. The Rupture Degree of Trees [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2008, 85(4): 16-24.
[3] LI Y K. The Rupture Degree of Graph [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2005, 82(7): 793-803.
[4] LI Y K, ZHANG S G. Extremal Graphs with Given Order and Rupture Degree [J]. Computers and Mathematics with

Applications，2010，60(6)：1706-1710.

[5] LI F W，LI X L. Computing the Rupture Degrees of Graphs [J]. Parallel Architectures，2004，2004：368-373.

[6] AYTAC A，ODABAS Z N. Computing the Rupture Degree in Composite Graphs [J]. International Journal of Foundations of Computer Science，2010，21(3)：311-319.

[7] ODABAS Z N，AYTAC A. Rupture Degree and Middle Graphs [J]. Comptes Rendus Del' Academie Bulgare Des Sciences，2009，65(3)：315-322.

[8] LI Y K，WANG Q N，WANG X L. The Rupture Degree of Graphs with k-Tree [J]. Open Journal of Discrete Mathematics，2016(6)：105-107.

[9] LI Y K，ZHANG S G，LI X L. The Rupture Degree of Graphs [J]. International Journal of Computer Mathematics，2005，82(7)：793-803.

[10] 徐俊明. 图论及其应用 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，1998.

[11] BAGGA K S，BEINEKE L W，LIPMAN M I，et al. Edge-Integrity：A Survey [J]. Discrete Math，1994，124：3-12.

[12] PIAZZAL B L，ROBERTS F S，STUECKE S K. Edge-Tenacious Networks [J]. Networks，1995，25：7-17.

A New Measure for Vulnerability of Network on Links

WANG Qing-ning，　LI Yin-kui

School of Mathematics and Statistics，Qinghai Nationalities University，Xining 810007，China

Abstract：With the rapid improvement of the performance of components，network failures are mostly caused by the blocking or breaking of links. In order to better characterize and analyze the network's anti-destructive performance，a new connectivity parameter has been introduced：edge rupture degree of graphs aspect to the link of networks. Using combinatorial optimization and analogy analysis methods，the calculation formulas of edge rupture degree of some special structural graphs and the bounds of edge rupture degree for general graphs are given. At the same time，the relationship between edge rupture degree of graph and other parameters is discussed，and examples show that the results are best possible.

Key words：edge rupture degree；unicycle graph；bicycle graph；complete graph；vulnerability of network

责任编辑　廖　坤