DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.08.025

有理系数多项式的教学难点①

晏胜华[1], 宋科研[2]

1. 四川外国语大学 国际商学院, 重庆 400031; 2. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 有理系数多项式的学习对于学生来说是比较困难的, 如果授课教师没有组织好教学, 就会导致学生对知识理解不清楚, 且无法灵活运用所学知识. 根据教学实践, 给出了讲授这一内容的几个关键点, 包括教学课程的难点和教学设计的组织实施. 首先, 解释清楚有理系数多项式的分解问题可以转化为整系数多项式的分解问题; 其次, 强调如果一个本原多项式是另一个的倍数, 那么这个倍数只能是 ± 1; 接着, 利用整系数多项式在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}$ 上可约性一致证明了艾森斯坦因判别法; 最后, 指出艾森斯坦因判别法可以变形的理论依据. 这些在实际的教学过程中取得了非常好的教学效果, 加深了学生们对知识的理解和运用.

关 键 词: 有理系数多项式; 可约; 艾森斯坦因判别法

中图分类号: G642 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)08-0149-04

高等代数是高校数学专业的一门重要基础课, 而多项式理论又是高等代数的一个重要内容. 大一学生刚从中学升上来, 思维还没有转换过来, 加之这门课程又比较抽象, 学生在学习多项式的初期就会觉得很困难, 到了后面学习有理系数多项式时就更加困难. 众所周知, 与实系数多项式和复系数多项式的因式分解相比, 有理系数多项式的因式分解要困难很多. 一般而言, 直接研究有理系数多项式在 $\mathbb{Q}[x]$ 上的分解很困难, 通常的做法是将其转化为整系数多项式在 $\mathbb{Z}[x]$ 内的分解问题, 而这又不可避免地涉及到本原多项式的讨论. 教学实践过程中, 如果授课教师没有组织好课堂教学, 那么学生就很难理解这一节的内容, 特别是知识的来龙去脉. 教师上完这一节内容后, 学生还是一头雾水, 即使勉强了解了一些命题和结论, 也很难应用, 对于这一节的脉络理不清晰, 他们很难接受如下的事实:

定理 1[1] 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积, 那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

推论 1[1] 设 $f(x), g(x)$ 是整系数多项式, 且 $g(x)$ 是本原的. 如果 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $h(x)$ 是有理系数多项式, 那么 $h(x)$ 一定是整系数的.

如果上面这两个结论理解不清, 会导致后面的艾森斯坦因判别法和整系数多项式有理根的判别定理理解不清.

以国内学校采用的高等代数教材[1-8] 来说, 一般的学生要完全学懂有理系数多项式这一节的内容是很困难的. 经过教学实践、交流和调查发现, 学生对书上的证明方法似懂非懂, 普遍感觉对, 但是又有说不出的疑惑.

实际上, 本节内容的教学难点主要有两方面: 一方面是学习脉络, 或者说是搞清楚框架; 另一方面是着重向学生提出几个基本事实. 这两点缺一不可, 否则对这一节的理解就有问题.

事实上, 我们后面所提出的观点在我们实际的教学过程中运用效果非常好, 加深了学生们对知识的理

---

① 收稿日期: 2019-04-17
基金项目: 国家自然科学基金项目(11501465).
作者简介: 晏胜华(1983-), 女, 讲师, 主要从事非线性分析的研究.
通信作者: 宋科研, 讲师.

解和运用.

1 教学过程中的几个难点

1.1 难点 1

定理 1 和推论 1 的证明都用到如下的定理 2:

定理 2 若 $f(x), g(x)$ 都是本原多项式, r 是常数, 且 $f(x) = rg(x)$, 则 $r = 1$ 或 $r = -1$.

证 设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

则

$$(a_n, \cdots, a_1, a_0) = 1 \qquad (b_n, \cdots, b_1, b_0) = 1$$

显然, r 是有理数, 故可设 $r = \frac{d}{c}$, 其中 $(c, d) = 1$. 我们有 $cf(x) = dg(x)$, 比较系数知 $ca_i = db_i$. 又注意到 $(c, d) = 1$, $c \mid b_i$, 其中 $i = 0, 1, \cdots, n$. 于是 $c \mid 1$, 即 $c = 1$ 或 $c = -1$.

当 $c = 1$ 时, $f(x) = dg(x)$, 注意到 $f(x)$ 是本原的, 易知 $d = 1$ 或 $d = -1$;

当 $c = -1$ 时, 同理可得 $d = 1$ 或 $d = -1$.

故 $r = 1$ 或 $r = -1$.

有了上面的定理 2, 再结合高斯引理(本原多项式的乘积还是本原多项式), 基本上就能解决学生的很多疑问和难点. 因此教学时, 第一个教学难点和重点就是自始至终, 要强调定理 2 和高斯引理的结合使用.

然而在书上(例如文献[1]), 只是稍微提了一下如下的定理 3:

定理 3[1] 如果 $f(x) = rg(x) = r_1 g_1(x)$, 其中 $g(x), g_1(x)$ 都是本原多项式, 那么必有 $r = \pm r_1$, $g(x) = \pm g_1(x)$.

实际上, 定理 3 本质上和定理 2 的是一样的. 由于 $r = \pm r_1$, $g(x) = \pm g_1(x)$ 的组合太多, 因此定理 3 容易让初学者感觉很复杂, 如果授课者不能意识到这一点, 教学中只是简单提及一下, 就不会引起学生的足够重视, 导致后面的学习困难. 然而在教学的过程中, 若把定理 3 改写成定理 2, 则思路更清晰, 结果也显得简单一些, 并且实际应用范围也更广. 我们将运用定理 2 和高斯引理给出本节所涉及到的一些结论的证明.

下面我们给出定理 1 及推论 1 的证明:

定理 1 的证明 设整系数多项式 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x), h(x)$ 是有理系数多项式, 且

$$\partial(g(x)) < \partial(f(x)) \qquad \partial(h(x)) < \partial(f(x))$$

令

$$f(x) = af_1(x) \qquad g(x) = rg_1(x) \qquad h(x) = sh_1(x)$$

其中 $f_1(x), g_1(x), h_1(x)$ 都是本原多项式, a 是整数, r, s 是有理数. 于是

$$f_1(x) = \frac{rs}{a} g_1(x) h_1(x)$$

由高斯引理和定理 2 知 $\frac{rs}{a} = \pm 1$, 从而 $rs = \pm a$. 这说明 rs 是整数. 因此, 我们有

$$f(x) = af_1(x) = (rsg_1(x))h_1(x)$$

其中 $rsg_1(x), h_1(x)$ 都是整系数多项式, 且次数都低于 $f(x)$ 的次数.

推论 1 的证明 设 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $f(x)$ 是整系数多项式, $g(x)$ 是本原多项式, $h(x)$ 是有理系数多项式. 令

$$f(x) = af_1(x) \qquad h(x) = rh_1(x)$$

其中 $f_1(x), h_1(x)$ 都是本原多项式, a 是整数, r 是有理数. 于是

$$f_1(x) = \frac{r}{a} g(x) h_1(x)$$

由高斯引理和定理 2 知 $\frac{r}{a}=\pm 1$，从而 $r=\pm a$. 这说明 r 是整数.

1.2　难点 2

由定理 1，我们有：

定理 4　设 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中可约当且仅当 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约.

定理 4 的证明由定理 1 可以得到，这时候应该向学生们强调：f 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中的可约性和在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的可约性是一致的. 正因为有定理 4 的保证，我们才可以证明如下的艾森斯坦因判别法：

艾森斯坦因判别法　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式. 若存在素数 p 满足：

(i) $p\nmid a_n$；

(ii) $p\mid a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$；

(iii) $p\nmid a_0^2$.

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约[1-8].

事实上，证明艾森斯坦因判别法时用到了反证法，即假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约，于是由定理 4 可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中可约，接下来的方法就众所周知了.

定理 5　设 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，且 $f(x)=rg(x)$，其中 r 是有理数，$g(x)$ 是本原多项式，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约当且仅当 $g(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中可约.

定理 5 的证明也容易从定理 2 和高斯引理得到. 这时候还应该向学生们强调：有理系数多项式在 $\mathbb{Z}[x]$ 中的可约性和它所确定的本原多项式在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的可约性是一致的.

有了定理 4、定理 5，就可以向学生们解释，为什么研究有理系数多项式要转化为研究整系数多项式.

1.3　难点 3

众所周知，艾森斯坦因判别法不是万能的，但是有些多项式变化一下也能使用. 通常教科书都不会提及如下的引理 1，但是在实际问题中却经常使用.

引理 1　设 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约当且仅当对任意的有理数 $a\neq 0$ 和 b，多项式 $g(x)=f(ax+b)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证　*必要性*　假设 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约. 令 $g(x)=g_1(x)g_2(x)$，其中 $g_1(x),g_2(x)\in\mathbb{Q}[x]$，且

$$\partial(g_1(x)),\partial(g_2(x))<\partial(g(x))$$

于是

$$f(x)=g_1\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)g_2\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)$$

显然 $g_1\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right),g_2\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)\in\mathbb{Q}[x]$，且

$$\partial\left(g_1\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)\right),\partial\left(g_2\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\right)\right)<\partial(g(x))=\partial(f(x))$$

这与 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约矛盾.

充分性　假设 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约. 令 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中 $f_1(x),f_2(x)\in\mathbb{Q}[x]$，且

$$\partial(f_1(x)),\partial(f_2(x))<\partial(f(x))$$

于是

$$g(x)=f(ax+b)=f_1(ax+b)f_2(ax+b)$$

即 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约，矛盾.

例 1　$f(x)=x^3+3x+1$ 在有理数域上是否可约？

例 1 不能直接使用艾森斯坦因判别法，但是经过适当的变形之后却可以.

由引理 1 知，$f(x)$ 与 $f(x-1)$ 有相同的可约性，简单计算后可知

$$f(x-1)=(x-1)^3+3(x-1)+1=x^3-3x^2+6x-3$$

取 $p=3$ 即可判别 $f(x-1)$ 不可约，于是 $f(x)$ 也不可约.

2 总 结

在实际组织教学的过程中，我们需要注意到如下几个关键步骤：

解释清楚有理系数多项式的分解问题可以转化为整系数多项式的分解问题，这在定理4中得到了体现；

强调定理2的重要性，以及定理2和高斯引理的结合使用；

利用定理1证明艾森斯坦因判别法；

艾森斯坦因判别法的变通使用，以及引理1的意义.

参考文献：

[1] 北大数学力学系. 高等代数[M]. 4版. 北京：高等教育出版社，2016：29-34.

[2] 姚慕生，吴泉水，谢启鸿. 高等代数学[M]. 3版. 上海：复旦大学出版社，2014：235-239.

[3] 蓝以中. 高等代数简明教程(下册)[M]. 北京：北京大学出版社，2007：166-173.

[4] 张贤科，许甫华. 高等代数学[M]. 2版. 北京：清华大学出版社，2004：22-25.

[5] 庄瓦金. 高等代数教程[M]. 北京：科学出版社，2013：160-164.

[6] 杜现昆. 高等代数[M]. 北京：高等教育出版社，2006：15-17.

[7] 丘维声. 高等代数[M]. 北京：科学出版社，2017：237-244.

[8] 丘维声. 高等代数学习指导书(下册)[M]. 北京：清华大学出版社，2009：91-97.

Difficulties in Teaching Polynomial with Rational Coefficients

YAN Sheng-hua[1]， SONG Ke-yan[2]

1. School of International Business, Sichuan International Studies University, Chongqing 400031, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: It is difficult for students to learn rational coefficient polynomials. If the teacher does not organize the teaching well, the students will not understand the knowledge and can not use the knowledge flexibly. According to the teaching practice, some key points of teaching, including the difficulties of teaching and the organization of teaching design, have been given in the paper. First of all, it is necessary to explain clearly that the decomposition problem of rational coefficient polynomials can be transformed into that of integral coefficient polynomials. Second, it is necessary to emphasize that if one Primitive polynomial is a multiple of the other, then the multiple can only be , this fact is usually used in conjunction with Gauss's Lemma. Then by the fact that integral coefficient polynomials on $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Z}$ have the same reducibility we can prove the Eisenstein discrimination method. And finally we give the theoretical basis for the deformation use of Eisenstein discrimination method. These have achieved very good teaching effect in the actual teaching process, deepened students' understanding and utilization of knowledge.

Key words: rational coefficient polynomial; reducible; Eisenstein discrimination method

责任编辑 廖 坤