第 44 卷　第 9 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2019 年 9 月
Vol. 44　No. 9　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Sep.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.09.001

改进强度统计算法及混沌序列复杂度分析①

杨德志

辽东学院 师范学院，辽宁 丹东 118001

摘要： 在原强度统计算法的基础上，增加了一个条件判断和一个加权值，设计了一种改进的强度统计算法．以超混沌 Lorenz 系统为例，利用该改进强度统计算法，对超混沌 Lorenz 系统产生的超混沌、混沌、周期序列的复杂度进行了分析，其结果表明超混沌序列的复杂度大于混沌序列，混沌序列的复杂度大于周期序列．最后，利用该改进强度统计算法对多个混沌和超混沌系统的复杂度进行了分析，得到了相同的结果，验证了该改进强度统计算法的有效性．

关　键　词： 复杂度；强度统计算法；混沌；超混沌 Lorenz 系统

中图分类号： O415.5　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1000－5471(2019)09－0001－05

随着混沌科学的发展，混沌在保密通信中的应用越来越广泛[1-3]．近年来，多种计算混沌序列复杂度的算法被提出[4-14]，其中强度统计算法[10-11]是在排列熵(PE)算法[12]的基础上，通过增加 Jensen-Shannon 分歧定义不均衡得到．由于强度统计算法能体现序列的相关结构，因此能更好地测度系统的复杂性．但强度统计算法不适用于周期序列的复杂度分析，而且也无法区分周期序列和混沌序列的复杂度．

本文研究发现虽然强度统计算法无法区分周期序列和混沌序列的复杂度，但在计算序列复杂度的过程中，其对周期序列计算得到的"系统在相空间中总的状态数目"要远远小于混沌序列．因此，本文在原强度统计算法的基础上，引入了"系统在相空间中总的状态数目"作为条件判断和加权值，提出了一种改进的强度统计算法，并对多个超混沌、混沌系统产生的超混沌、混沌和周期序列的复杂度进行了分析．

1　改进强度统计算法原理与描述

1.1　强度统计算法描述

强度统计算法是一种计算序列复杂度的算法，其序列复杂度与强度统计复杂度测度 $C_J[P]$ 相关，$C_J[P]$ 计算公式为

$$C_J[P]=Q_J[P,P_e]\cdot H_S[P] \tag{1}$$

$$H_S[P]=\frac{S[P]}{S_{\max}} \tag{2}$$

$$Q_J[P,P_e]=Q_0\cdot\left\{S[\frac{(P+P_e)}{2}]-\frac{S[P]}{2}-\frac{S[P_e]}{2}\right\} \tag{3}$$

其中：S 为 Shannon 熵；Q_J 是根据 Jensen-Shannon 分歧定义的不均衡；P 表示一种动态系统产生的时间序列的概率分布；P_e 表示均匀分布，即 $P_e=\left\{\frac{1}{N},\cdots,\frac{1}{N}\right\}$，$N$ 代表系统在相空间中总的状态数目；$S[P]=$

① 收稿日期：2017－12－23

作者简介：杨德志(1976－)，男，副教授，硕士，主要从事数学模型与优化，数学思维训练理论与实践研究．

$-\sum_{j=1}^{N} p_j \ln(p_j)$，$S_{\max} = S[P_e] = \ln N$；$Q_0$ 是归一化常数且

$$Q_0 = -2\left\{\left(\frac{N+1}{N}\right)\ln(N+1) - 2\ln(2N) + \ln N\right\}^{-1} \tag{4}$$

根据上述描述可知，$0 \leqslant H_S[P] \leqslant 1$，$0 \leqslant Q_J[P, P_e] \leqslant 1$，$C_J[P]$ 能呈现动态系统产生的时间序列的相关结构，且复杂度测度值 $C_J[P]$ 越小，序列复杂度越大，反之亦然，而对没有任何结构的完全随机序列，$C_J[P] = 0$.

概率分布 P 采用Bandt-Pompe提出的方法进行计算[12]. 给定时间序列$\{x_t \mid t = 1, \cdots, T\}$和一个嵌入维 $D > 1$，对每一时刻 $i(i = 1, 2, \cdots, T - D + 1)$，其 D 阶顺次模式是由时刻$\{i, i+1, \cdots, i+D-1\}$的值组成的 D 维向量

$$(s) \mapsto (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+D-1}) \tag{5}$$

显然，D 越大，向量提供的信息越多. 通过和时刻 i 联系的“顺次模式”，定义$(0, 1, \cdots, D-1)$的一个排列 $\boldsymbol{G} = (r_0, r_1, \cdots, r_{D-1})$ 为

$$x_{i+r_0} \leqslant x_{i+r_1} \leqslant \cdots \leqslant x_{i+r_{D-1}} \tag{6}$$

若 $x_{i+r_i} = x_{i+r_{i-1}}$，则 $r_i < r_{i-1}$. 因此，对所有可能的 $D!$ 个 D 阶排列 π，概率分布 $P = \{p(\pi)\}$ 定义为

$$p(\pi) = \frac{\mathrm{card}(\{s \mid (s) \text{ 中元素满足 } \boldsymbol{G} \text{ 中元素排序}, i \leqslant T - D + 1\})}{T - D + 1} \tag{7}$$

其中 card 表示求集合元素个数. 需要指出的是，按此种排序求得的对于周期序列的概率会出错[11]，因此该强度统计算法不适用于周期序列，也不能区分周期序列和混沌序列的复杂度.

1.2 改进强度统计算法

针对强度统计算法存在的问题，本文研究发现虽然强度统计算法无法区分周期序列和混沌序列的复杂度，但在计算序列复杂度的过程中，其对周期序列计算得到的“系统在相空间中总的状态数目”要远远小于混沌序列. 因此，本文在原强度统计算法的基础上，引入了系统在相空间中总的状态数目 N 作为条件判断和加权值，提出了一个改进强度统计复杂度测度 $IMC_J[P]$，即

$$IMC_J[P] = \begin{cases} \infty, & N = \min(D!, T - D + 1) \\ 0, & N = 1 \\ A, & 1 < N < \min(D!, T - D + 1) \end{cases} \tag{8}$$

$$A = \begin{cases} 0, & 1 < N < \min(D!, T - D + 1) \text{ 且 } C_J[P] = 0 \\ \dfrac{1}{C_J[P]} \cdot \dfrac{N}{\min(D!, T - D + 1)}, & 1 < N < \min(D!, T - D + 1) \text{ 且 } C_J[P] > 0 \end{cases} \tag{9}$$

其中：$\min(D!, T-D+1)$ 为系统在相空间中总的状态数目 N 的最大值，$\dfrac{N}{\min(D!, T-D+1)}$ 为在原强度统计算法上引入的加权值.

对于改进强度统计算法，复杂度测度值 $IMC_J[P]$ 越大，则序列复杂度越大，反之亦然.

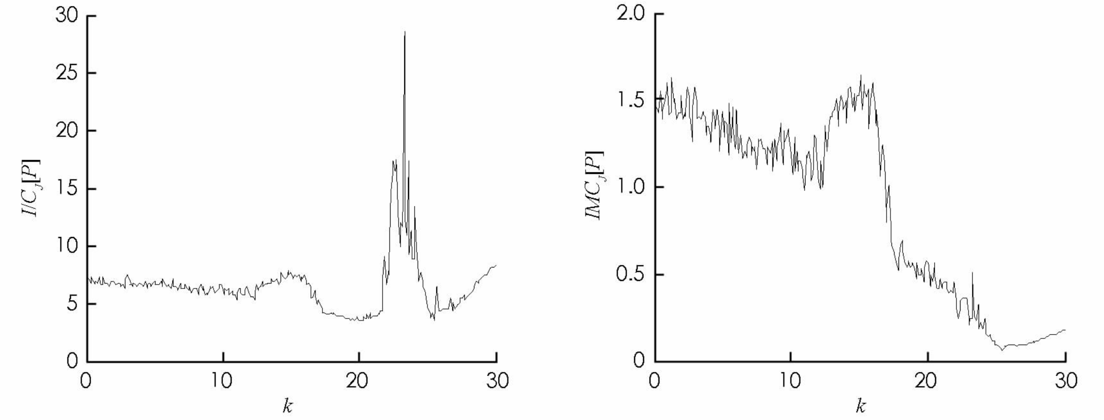
2 基于改进强度统计算法的超混沌 Lorenz 系统复杂度分析

文献[15]在典型的三维 Lorenz 系统上构造的四维超混沌 Lorenz 系统如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - y - xz + u \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{u} = -kx \end{cases} \tag{10}$$

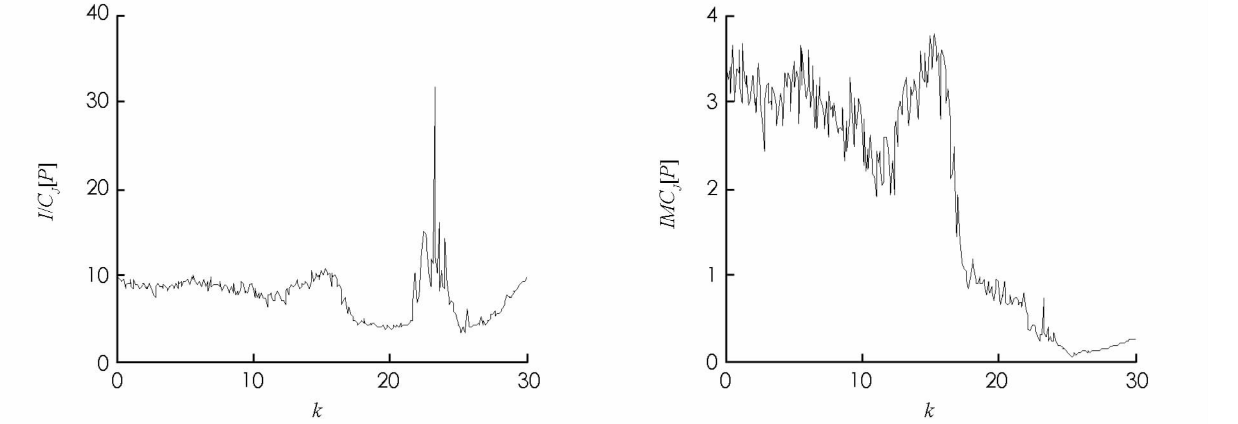
其中：系统参数 $a=10$，$b=\frac{8}{3}$，$c=28$，k 为待定常数，且当 $k\in(0,16.6]$ 时，系统(10) 产生超混沌序列；当 $k\in(16.6,21.75]$ 时，系统(10) 产生混沌序列；当 $k\in(21.75,30]$ 时，系统(10) 产生周期序列.

取嵌入维数 $D=7$ 和 $D=8$，利用原强度统计算法和改进强度统计算法对系统(10) 随参数 k 变化的复杂度进行计算，得到的复杂度分布如图 1,2 所示.



(a) 原强度统计算法的计算结果　　(b) 改进强度统计算法的计算结果

图 1　$D=7$ 时系统(10) 随参数 k 变化的复杂度分布



(a) 原强度统计算法的计算结果　　(b) 改进强度统计算法的计算结果

图 2　$D=8$ 时系统(10) 随参数 k 变化的复杂度分布

从图 1(a) 和图 2(a) 可以看出，通过原强度统计算法计算得到的超混沌序列复杂度大于混沌序列，但周期序列的复杂度有部分比超混沌序列的复杂度还大，显然这是一个错误结果，表明原强度统计算法不能区分周期序列与超混沌和混沌序列的复杂度；从图 1(b) 和图 2(b) 可以看出，通过改进强度统计算法计算得到的超混沌序列复杂度大于混沌序列，混沌序列的复杂度大于周期序列，表明改进强度统计算法能正确地区分超混沌、混沌和周期序列的复杂度，验证了本文提出的改进强度统计算法的有效性.

3　多个混沌系统的复杂度分析结果

为了进一步验证本文提出的改进强度统计算法的有效性，利用改进强度统计算法对现有混沌系统的复杂度进行了分析. 由于篇幅限制，本文仅随机选择了超混沌 Lü 系统[16]、大范围超混沌系统[17]、Liu 混沌系统[18]，表 1－3 列出了几个固定参数的结果，其中 d,k,C 为系统参数.

表1 超混沌Lü系统的复杂度分析

嵌入维数 D	复杂度			
	超混沌状态（系统变化参数 $d=1$）	混沌状态（系统变化参数 $d=2$）	周期状态（系统变化参数 $d=4$）	周期状态（系统变化参数 $d=4.5$）
7	0.500 3	0.478 4	0.374 1	0.165 2
8	1.194 6	1.162 8	0.352 3	0.162 5

表2 大范围超混沌系统的复杂度分析

嵌入维数 D	复杂度			
	超混沌状态（系统变化参数 $k=25$）	混沌状态（系统变化参数 $k=600$）	周期状态（系统变化参数 $k=10$）	周期状态（系统变化参数 $k=15$）
7	19.327 0	15.318 7	0.290 0	0.202 5
8	98.720 3	67.561 9	0.434 1	0.262 0

表3 Liu混沌系统的复杂度分析

嵌入维数 D	复杂度		
	混沌状态（系统变化参数 $c=6$）	周期状态（系统变化参数 $c=9$）	周期状态（系统变化参数 $c=20$）
7	5.659 8	0.077 3	0.150 0
8	14.820 5	0.101 7	0.232 9

从表1—3可以看出，超混沌Lü系统和大范围超混沌系统产生的超混沌序列的复杂度大于混沌序列，混沌序列的复杂度大于周期序列，Liu混沌系统产生的混沌序列的复杂度大于周期序列，从而进一步表明，本文提出的改进强度统计算法能有效地区分超混沌、混沌和周期序列的复杂度.

4 总结

本文提出了一种改进的强度统计算法，解决了原强度统计算法不能区分混沌序列和周期序列复杂度的问题. 利用改进强度统计算法对多个超混沌、混沌系统产生的超混沌、混沌和周期序列的复杂度进行数值计算，结果表明超混沌序列的复杂度大于混沌序列，混沌序列的复杂度大于周期序列，从而验证了该改进强度统计算法能有效地区分混沌序列和周期序列的复杂度，弥补了原强度统计算法的不足.

参考文献：

[1] YANG H, TANG W K S, CHEN G, et al. System Design and Performance Analysis of Orthogonal Multi-Level Differential Chaos Shift Keying Modulation Scheme [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2016, 63(1): 146-156.
[2] KADDOUM G, SOUJERI E. NR-DCSK: A Noise Reduction Differential Chaos Shift Keying System [J]. IEEE Trans Circuits Syst II Exp Briefs, 2016, 63(7): 648-652.
[3] ESCRIBANO F, KADDOUM G, WAGEMAKERS A, et al. Design of a New Differential Chaos-Shift-Keying System for Continuous Mobility [J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(5): 2066-2078.
[4] PINCUS S M. Approximate Entropy as a Measure of System Complexity [C]// Proceedings of the National Academy of Science [C]. USA. 1991, 88(6): 2297-2301.
[5] 肖方红，阎桂荣，韩宇航. 混沌伪随机序列复杂度分析的符号动力学方法 [J]. 物理学报，2004，53(9)：2877-2881.
[6] CHEN W, ZHUANG J, YU W, et al. Measuring Complexity Using FuzzyEn, ApEn, and SampEn [J]. Medical Engineering and Physics, 2009, 31(1): 61-68.
[7] 董燕青，谈国强，孙克辉，等. 谱熵和小波熵算法在混沌序列结构复杂性分析中的应用 [J]. 小型微型计算机系统，2014，35(2)：348-352.
[8] 梁涤青，陈志刚，邓小鸿. 基于小波包能量熵的混沌序列复杂度分析 [J]. 电子学报，2015，43(10)：1971-1977.
[9] 孙克辉，贺少波，朱从旭，等. 基于 C_0 算法的混沌系统复杂度特性分析 [J]. 电子学报，2013，41(9)：1765-1771.
[10] LARRONDO H A, GONZÁLEZ C M, MARTÍN M T, et al. Intensive Statistical Complexity Measure of Pseudorandom Number Generators [J]. Physica A: Statistical Mechanics & Its Applications, 2005, 356(1): 133-138.

[11] 孙克辉，贺少波，盛利元. 基于强度统计算法的混沌序列复杂度分析 [J]. 物理学报，2011，60(2)：90-96.
[12] BANDT C，POMPE B. Permutation Entropy：a Natural Complexity Measure for Time Series [J]. Physical Review Letters，2002，88(17)：1741-1743.
[13] HE S，SUN K，WANG H. Multivariate Permutation Entropy and Its Application for Complexity Analysis of Chaotic Systems [J]. Physica A：Statistical Mechanics & Its Applications，2016，461：812-823.
[14] CHRISMENT A M，FIRPO M C. Entropy-Complexity Analysis in Some Globally-Coupled Systems [J]. Physica A：Statistical Mechanics & Its Applications，2016，460：162-173.
[15] 王光义，郑　艳，刘敬彪. 一个超混沌 Lorenz 吸引子及其电路实现 [J]. 物理学报，2007，56(6)：3113-3120.
[16] 刘扬正. 超混沌 Lü 系统的电路实现 [J]. 物理学报，2008，57(3)：1439-1443.
[17] 贾红艳，陈增强，袁著祉. 一个大范围超混沌系统的生成和电路实现 [J]. 物理学报，2009，58(7)：4469-4476.
[18] 王发强，刘崇新. Liu 混沌系统的混沌分析及电路实验的研究 [J]. 物理学报，2006，55(10)：5061-5069.

On Improved Intensive Statistical Complexity Algorithm and Complexity Analysis of Chaotic Sequence

YANG De-zhi

Teacher's College，Eastern Liaoning University，Dandong Liaoning 118001，China

Abstract：Considering the issue that intensive statistical complexity algorithm cannot distinguish the complexity of the periodic sequence and the chaotic sequence，an improved intensive statistical complexity algorithm has been presented. Based on the original intensive statistical complexity algorithm，an improved intensive statistical complexity algorithm has been designed via adding a condition judgment and a weight value. Take example for the hyperchaotic Lorenz system，it is analyzed for the complexity of the hyperchaoitc sequence，chaotic sequence and periodic sequence generated by the hyperchaotic Lorenz system，based on the improved intensive statistical complexity algorithm. The results show that the complexity of the hyperchaotic sequence is greater chaotic sequence，and the complexity of the chaotic sequence is greater periodic sequence. At the end，based on the improved intensive statistical complexity algorithm，the complexity of some hyperchaotic systems and chaotic systems is studied. The results show that the complexity of the hyperchaotic sequence is greater chaotic sequence，and the complexity of the chaotic sequence is greater periodic sequence. These results verify the availability of the improved intensive statistical complexity algorithm.

Key words：complexity；intensive statistical complexity algorithm；chaos；hyperchaotic Lorenz system

责任编辑　张　构