

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.09.003

两个同质动力学性态的 Aihara 神经元电突触耦合的完全同步^①

沙 丽, 杨 丽, 李绍林

红河学院 数学与应用数学系, 云南 蒙自 661199

摘要: 讨论两个同质动力学性态下的 Aihara 神经元耦合系统的状态完全同步问题. 以主稳定函数为分析工具, 首先通过数值模拟指出单个神经元处于混沌放电状态时, 神经元对应的最大 Lyapunov 指数具有非负的性质; 其次, 对于两个 Aihara 神经元在电突触耦合下构成的系统, 给出系统能实现状态完全同步的一个必要条件, 利用系统的主稳定函数值绘制了 2 维参数平面的完全同步区域. 数值仿真表明, 过大或过小的耦合强度都不能使耦合系统达到状态的完全同步. 最后, 所设计的数值实例表明了理论结果的合理性和有效性.

关 键 词: Aihara 神经元; 电突触耦合; 完全同步; 主稳定函数; 平面同步区域

中图分类号: O193

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2019)09-0015-06

在自然界和人工系统中, 交互信息的个体之间的状态同步是一种普遍存在的现象. 自文献[1-2] 提出混沌同步这一概念以来, 有关同步的研究结果已经广泛应用于自然科学^[3-4] 和工程领域^[5-7]. 神经元状态的聚类行为^[8-9] 已被检测为一种大脑信号的同步状态. 在生命科学的一些领域(如哺乳动物视觉皮层), 神经元状态的完全同步已经被实验所证实^[10-11]. 完全同步作为同步状态的一种特殊形式, 已被证实是人脑中信息编码和传递的一种机制^[12].

在描述神经元动力学行为的模型中, 有一类是离散时间类型的^[13-16], 如 Rulkov 模型、Aihara 模型和 Chialvo 模型等.

受到文献[16] 的启示, 本文考虑了由两个二维 Aihara 神经元通过电耦合交互的耦合系统达到完全同步的以下问题: 研究系统参数区间对系统最大 Lyapunov 指数的影响; 在电突触耦合下, 从数值和理论上, 研究两个同质 Aihara 神经元状态完全同步的存在性; 实现耦合系统状态同步的参数区域的可视化.

1 模型描述

1.1 单个的二维 Aihara 神经元模型及其动力学性态

考虑如下的二维 Aihara 神经元模型^[15]:

$$\begin{cases} x(t+1) = k_1 x(t) + k_2 y(t) - \alpha f(x(t)) + c \\ y(t+1) = x(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 表示神经元在离散时间 $t = 0, 1, 2, \dots$ 时刻的输出状态; $y(t)$ 表示神经元在 $t-1$ 时刻的时滞内部状态; k_1, k_2 表示神经元不应性阻尼系数; $\alpha > 0$ 和 $c > 0$ 为模型的调节参数. 函数 f 为以 ϵ 为参数的坡度函数:

① 收稿日期: 2017-11-27

基金项目: 地方高校国家级大学生创新创业训练计划项目(201710687005); 红河学院第三批校中青年学术骨干培养对象(2016GG0308).

作者简介: 沙 丽(1997-), 女, 主要从事神经网络动力学的研究.

通信作者: 李绍林, 硕士, 副教授.

$$f(u) = (1 + \exp(-u/\epsilon))^{-1}$$

(2)

文献[15]以系统参数 k_2 为分岔参数,观察到了 Aihara 神经元的峰放电现象.

本文以 α 为分岔参数来对模型进行研究. 为便于数值模拟,取定模型(1)中的部分参数为: $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.05$, $\epsilon = 0.05$, $c = 0.8$. 利用数值模拟,首先给出模型(1)随参数 α 在 $[0.5, 5]$ 上的状态分岔图(图 1),图形表明参数 α 某些特定值会导致神经元状态的混沌现象. 利用主稳定函数作为系统稳定性的分析工具,图 2 则展示了模型(1)的最大 Lyapunov 指数 $L_{\max}(\alpha)$ 关于参数 α 在 $[0.5, 5]$ 上的分布曲线,当 $L_{\max}(\alpha) \geq 0$ 时,模型(1)处于不稳定的混沌状态;当 $L_{\max}(\alpha) < 0$ 时,模型(1)处于稳定状态.

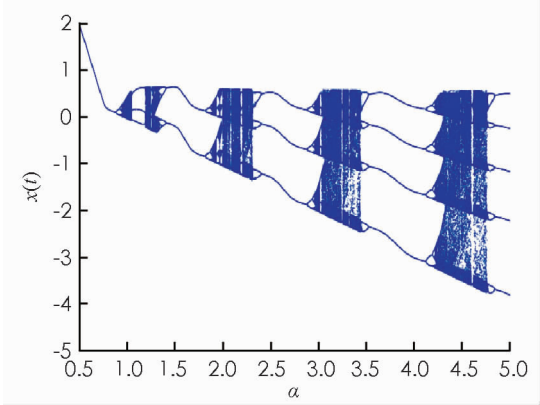


图 1 模型(1)关于参数 $\alpha \in [0.5, 5]$ 的放电状态分岔图

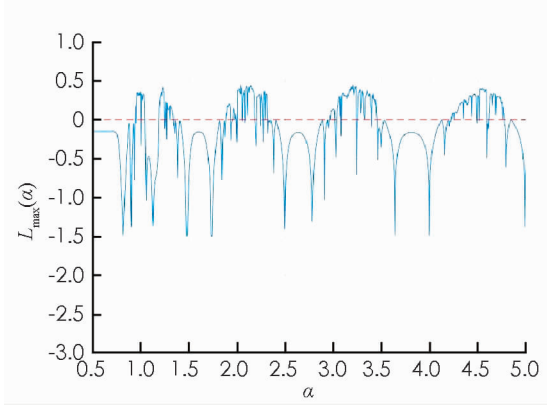


图 2 模型(1)关于参数 α 的最大 Lyapunov 指数变化曲线图

当参数 $\alpha = 3.2$ 以及初始条件 $x(0) = 1.2$, $y(0) = -0.12$ 时,图 3 展示了模型(1)在 (x, y) 平面上的相图. 图 4 描绘了模型(1)在 $t \in [2800, 3020]$ 上神经元状态的波形图. 如图 3 和图 4 所示,当 $\alpha = 3.2$ 时,模型(1)所描述的神经元处于混沌尖峰放电状态.

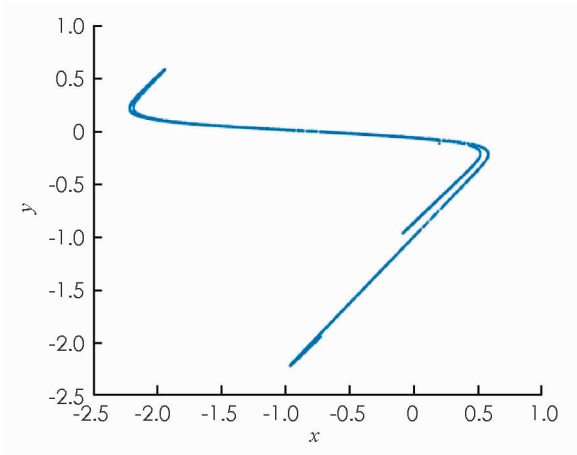


图 3 当 $\alpha = 3.2$ 时模型(1)的平面相图

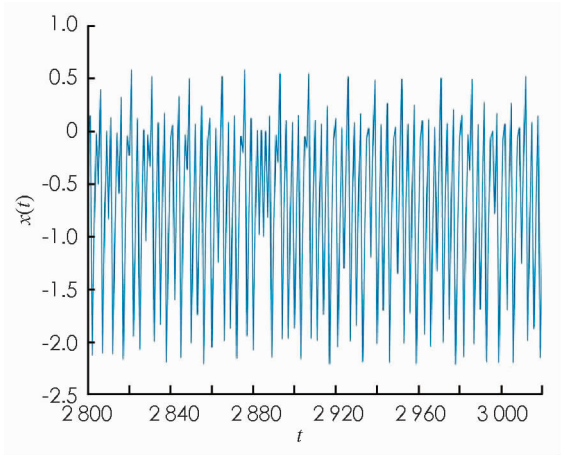


图 4 模型(1)所描述神经元处于尖峰放电状态

1.2 两个 2 维 Aihara 神经元的电突触耦合

文献[16]建立了电突触耦合下两个 Rulkov 神经元的耦合模型. 我们将此模型应用于两个同质性态的 Aihara 神经元耦合模型,建立如下的耦合系统:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = k_1 x_1(t) + k_2 y_1(t) - \alpha f(x_1(t)) + c + \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ y_1(t+1) = x_1(t) \\ x_2(t+1) = k_1 x_2(t) + k_2 y_2(t) - \alpha f(x_2(t)) + c + \sigma(x_1(t) - x_2(t)) \\ y_2(t+1) = x_2(t) \end{cases}$$

(3)

其中参数 σ 为神经元的耦合强度. 当 $\sigma > 0$ 时,神经元的电突触耦合是刺激性的;当 $\sigma < 0$ 时,耦合是抑制性的.

图 5 考虑了在参数 $\sigma = 0.2$ 和 $\alpha = 3.2$ 时,两个初始条件分别为 $(-1.97, -3.14)$ 和 $(-1.7, -3.5)$ 的

处于混沌尖峰放电状态的 Aihara 神经元在 $t \in [7880, 8050]$ 的状态波形图. 图 6 展示了两个神经元的状态差 $x_1(t) - x_2(t)$, $t = 0, 1, \dots, 10\ 000$. 数值结果表明, 这两个神经元的状态出现了“间歇性同步现象”.

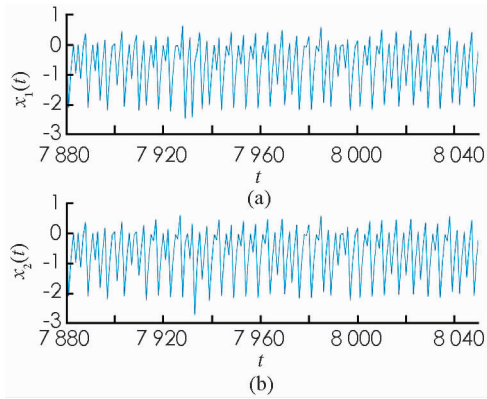


图 5 系统(3)处于混沌状态的 Aihara 神经元的放电状态

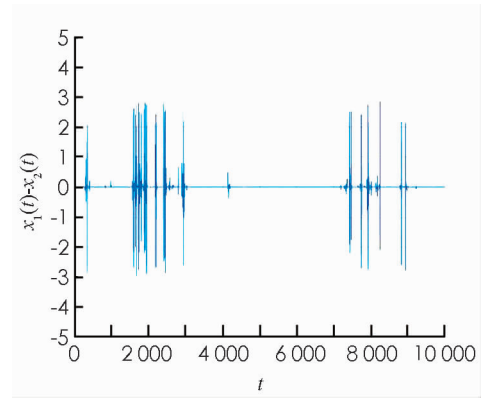


图 6 系统(3) $x_1(t) - x_2(t)$ 的变化曲线图

2 完全同步存在性

在本节中利用主稳定函数(Master Stability Function)为分析工具讨论耦合神经元模型(3)的参数与模型中两个神经元状态完全同步的关系.

主稳定函数分析法是讨论一个动力学系统稳定性的基本方法, 主稳定函数反映了动力系统的最大 Lyapunov 指数与系统参数之间的函数关系. 此外, 判定由混沌系统分解出的子系统之间能否实现同步的主要判据之一就是系统的 Lyapunov 指数皆为负值.

为模型(3)引入外部和内部耦合矩阵如下,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

则模型(3)等价地转化为如下矩阵形式

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) + \sigma(\mathbf{G} \otimes \mathbf{F})\mathbf{X}(t) \quad (5)$$

其中: $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_1^T(t), \mathbf{X}_2^T(t))^T$, $\mathbf{X}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))^T$, $i = 1, 2$. $\otimes$ 代表矩阵的 Kronecker 积. 向量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$ 定义为

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} k_1 x_1(t) + k_2 y_1(t) - \alpha f(x_1(t)) + c \\ x_1(t) \\ k_1 x_2(t) + k_2 y_2(t) - \alpha f(x_2(t)) + c \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

设 $\mathbf{s}(t) = (s_x(t), s_y(t))^T$ 是系统(5)中两个神经元的同步解, 由于耦合矩阵 $\mathbf{G}$ 具有行和为零的性质, 所以 $\mathbf{s}(t)$ 满足如下方程:

$$\mathbf{s}(t+1) = \mathbf{g}(\mathbf{s}(t)) \quad (7)$$

这里, $\mathbf{g}(\mathbf{s}(t)) = (k_1 s_x(t) + k_2 s_y(t) - \alpha f(s_x(t)) + c, s_x(t))^T$.

定理 1 对于耦合系统(5), 如果下列 2 维系统

$$\xi(t+1) = \begin{pmatrix} f'(s_x(t)) - 2\sigma & k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi(t) \quad (8)$$

的零解是渐近稳定的, 那么系统(5)的两个神经元能达到局部状态完全同步. 记

$$S_D = \{(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid L_{\max}(\sigma, \alpha) < 0\}$$

其中 $L_{\max}(\cdot)$ 为方程(8)相应的主稳定函数. 那么, 耦合系统(5)中的两个神经元关于参数 σ, α 能达到状态完全同步的必要条件是参数对 $(\sigma, \alpha) \in S_D$.

证 记 $\mathbf{E}_i(t) = \mathbf{X}_i(t) - \mathbf{s}(t)$, $i = 1, 2$, $\mathbf{E}(t) = (\mathbf{E}_1^T(t), \mathbf{E}_2^T(t))^T$, 那么系统(5)的相应变分系统为

$$\mathbf{E}(t+1) = \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{S}(t))\mathbf{E}(t) + \sigma(\mathbf{G} \otimes \mathbf{I})\mathbf{E}(t) \quad (9)$$

其中: $\mathbf{S}(t) = (\mathbf{s}^T(t), \mathbf{s}^T(t))^T$, $\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{S}(t))$ 表示向量函数 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{S}(t)$ 处的 Jacobian 矩阵, 即

$$\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{S}(t)) = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} f'(s_x(t)) & k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{I}_2$ 表示 2 阶单位矩阵. 另一方面, 耦合矩阵 $\mathbf{G}$ 是对称矩阵且特征值 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = -2$, 故存在正交矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{G} \mathbf{P} = \mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. 作变换 $\mathbf{Z}(t) = (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{I}_2)\mathbf{E}(t)$, 则(9)式可转化为

$$\mathbf{Z}(t+1) = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} f'(s_x(t)) & k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z}(t) + \sigma(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})\mathbf{Z}(t) \quad (11)$$

记 $\mathbf{Z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1(t) \\ \mathbf{Z}_2(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{Z}_i(t) \in R^2$, 则(11)式分解为

$$\mathbf{Z}_i(t+1) = \begin{pmatrix} f'(s_x(t)) & k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Z}_i(t) + \sigma \lambda_i \mathbf{I} \mathbf{Z}_i(t), i = 1, 2 \quad (12)$$

当 $i = 2$ 时, 由于 $\lambda_2 = -2$, 由(12)式得,

$$\mathbf{Z}_2(t+1) = \begin{pmatrix} f'(s_x(t)) - 2\sigma & k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Z}_2(t) \quad (13)$$

显然, (13)式与(8)式等价. 因此, 当系统(8)的零解渐近稳定时, 系统(5)的解 $\mathbf{S}(t)$ 渐近稳定, 即两个同质的 Aihara 神经元系统达到完全同步.

记系统(8)相应的最大 Lyapunov 指数(即主稳定函数)为 $L_{\max}(\sigma, \alpha)$, 根据系统最大 Lyapunov 指数的定义, 若系统(5)达到完全同步状态 $s(t)$, 那么对应于系统(8)中参数 σ, α 的取值, $L_{\max}(\sigma, \alpha) < 0$. 因此, 系统(5)中两个神经元达到状态完全同步的必要条件是参数对 (σ, α) 使得 $L_{\max}(\sigma, \alpha) < 0$, 即

$$(\sigma, \alpha) \in S_D = \{(\sigma, \alpha) \in R^2 \mid L_{\max}(\sigma, \alpha) < 0\}$$

证毕.

为可视化系统(8)对应的主稳定函数 $L_{\max}(\sigma, \alpha)$ 的分布情况, 做如下设计: 把矩形域 $[-1, 1] \times [0.5, 5]$ 分割为 100×100 的网格并把网格交点处的坐标值作为参数对 (σ, α) 的取值. 对每一对 (σ, α) 的取值, 采取 2 500 次迭代数值计算系统(8)的最大 Lyapunov 指数值. 图 7 中利用颜色的渐变展示了主稳定函数 $L_{\max}(\sigma, \alpha)$ 关于参数 σ, α 的函数值分布情况: 当参数对 (σ, α) 的取值位于蓝色区域时, 所对应的主稳定函数值小于零, 系统(5)中的神经元能实现状态完全同步; 当参数对 (σ, α) 的取值位于蓝色区域之外时, 所对应的主稳定函数值大于等于 0, 系统(5)中的神经元不能达到状态完全同步. 图 8 给出了系统(8)中参数 $\alpha = 3.2$ 时函数 $L_{\max}$ 随耦合强度 $\sigma \in [-1, 1]$ 的变化曲线. 从图 7, 8 中不难发现, 对于离散型耦合神经元系统而言, 过大或过小的耦合强度都不能使耦合系统达到状态的完全同步, 这与连续型耦合神经元系统有本质上的区别.

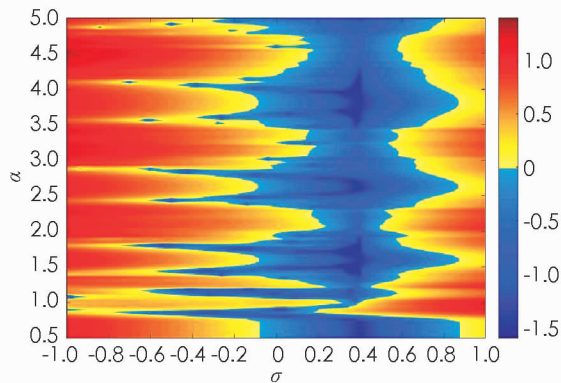


图 7 系统(8)关于参数对 (σ, α) 的主稳定函数值 $L_{\max}(\sigma, \alpha)$ 的变化分布情况

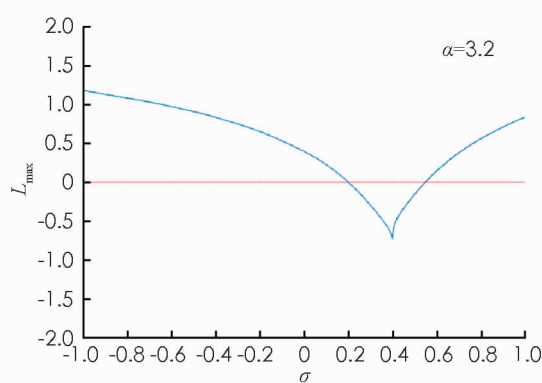


图 8 当 $\alpha = 3.2$ 时系统(8)对应的主稳定函数 $L_{\max}$ 关于耦合强度 σ 的变化曲线

为了进一步检验理论结果的有效性, 考虑系统(5)的参数 $\alpha = 3.2$ 和耦合强度 $\sigma = 0.18, 0.22$ 两种情

形. 系统(5) 在前 3 000 次迭代里, 取耦合强度 $\sigma = 0.18$, 由定理 1 及图 9,10 知, 系统(5) 中的两个神经元状态不能达到完全同步; 后 3 000 次迭代取 $\sigma = 0.22$, 系统(5) 中的两个神经元状态能达到完全同步. 图 9 展示了系统(5) 中的两个神经元在 $t \in [2980, 3060]$ 时的状态波形图, 图 10 展示了两个神经元状态差 $x_1(t) - x_2(t)$ 的变化情况, 数值仿真结果与理论结果相符.

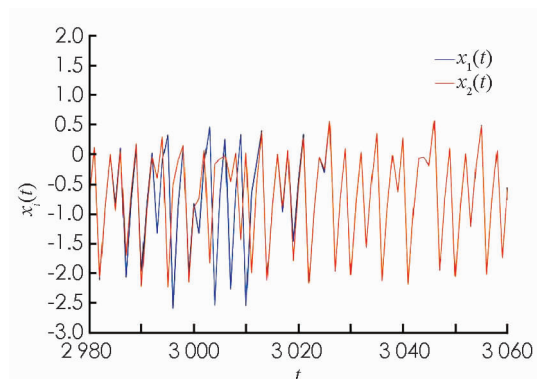


图 9 系统(5) 中两个混沌神经元在两个不同耦合强度作用下的放电状态变化情况

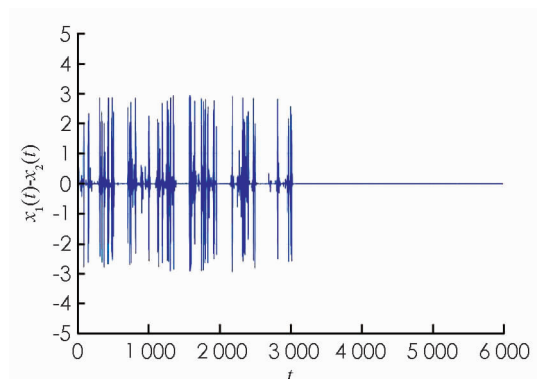


图 10 系统(5) 混沌神经元状态差 $x_1(t) - x_2(t)$ 在不同耦合强度作用下的变化情况

3 结 论

本文研究了两个同质的 Aihara 神经元在电突触耦合系统的完全同步问题. 利用主稳定函数这一工具, 选取单个神经元的调节参数和系统耦合强度为变量讨论系统的最大 Lyapunov 指数值的变化情况. 在理论上给出了耦合系统关于上述两个参数实现状态完全同步的一个必要条件和完全同步化的双参数平面区域. 借助于数值计算, 实现了该同步区域的可视化. 值得注意的是, 只要耦合强度在一定有限范围内, 刺激和抑制也能实现系统神经元的状态完全同步. 文中所设计的数值仿真实例验证了上述理论结果的正确性. 最后, 在文中仅考虑了两个同质的 Aihara 神经元的电突触耦合, 而异质的神经元耦合、其它耦合方式(如化学突触)以及推广两个神经元到多个神经元构成的网络等, 都是值得继续深入探讨的问题.

参考文献:

- [1] PECORA L, CARROLL T. Synchronization in Chaotic Systems [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821-825.
- [2] PECORA L, CARROLL T, JOHNSON G, et al. Fundamentals of Synchronization in Chaotic Systems, Concepts, and Applications [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 1997, 7(4): 520-543.
- [3] 吕 翎, 张 超. 一类节点结构互异的复杂网络的混沌同步 [J]. 物理学报, 2009, 58(3): 1462-1466.
- [4] MAHMOUD G, MAHMOUD E. Complete Synchronization of Chaotic Complex Nonlinear Systems with Uncertain Parameters [J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 62(4): 875-882.
- [5] LÜ L, MENG L. Parameter Identification and Synchronization of Spatiotemporal Chaos in Uncertain Complex Network [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 66(4): 489-495.
- [6] KWON O M, PARK J H, LEE S M. Secure Communication Based on Chaotic Synchronization via Interval Time-Varying Delay Feedback Control [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 63(1): 239-252.
- [7] 黄丽莲, 尹启天. 基于输出控制的混沌同步保密通信系统 [J]. 电子与信息学报, 2009, 31(10): 2402-2405.
- [8] 王青云, 陆启韶. 兴奋性化学突触耦合的神经元的同步 [J]. 动力学与控制学报, 2008, 6(1): 35-39.
- [9] 余双琦, 周坚强, 朱 萍, 等. 相对阈值耦合的混沌神经元同步研究 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2013, 40(4): 433-436.
- [10] SINGER W, GRAYC. Visual Feature Integration and the Temporal Correlation Hypothesis [J]. Annual Review of Neuroscience, 1995, 18(1): 555-586.
- [11] LLINAS R, RIBARY U. Coherent 40-Hz Oscillation Characterizes Dream State in Humans [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1993, 90(5): 2078-2081.
- [12] ECKHORN R. Neural Mechanisms of Scene Segmentation: Recordings from the Visual Cortex Suggest Basic circuits for

- linking field models [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(3): 464-479.
- [13] IBARZ B, CASADO J, SANJUAN M, et al. Map-Based Models in Neuronal Dynamics [J]. Physics Reports, 2011: 1-74.
- [14] SAUSEDOSOLORIO J, PISARCHIK A. Synchronization of Map-based Neurons with Memory and Synaptic Delay [J]. Physics Letters A, 2014, 378(30): 2108-2112.
- [15] TANAKA H, USHIO T, KAWANAMI S, et al. A High-Dimensional Chaotic Discrete-Time Neuron Model and Bursting Phenomena [J]. Physics Letters A, 2003, 308(1): 41-46.
- [16] SUN H, CAO H. Synchronization of Two Identical and Non-identical Rulkov Models [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016: 15-27.

On Complete Synchronization of Two Identical Aihara Neurons Model via Electrical Synapse Coupling

SHA Li, YANG Li, LI Shao-lin

Department of Mathematics and Applied Mathematics, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199, China

Abstract: Complete synchronization of two identical dynamical Aihara neurons model has been discussed. Based on the Master Stability Function (MSF) analysis and numerical simulations, the property that the corresponding maximum Lyapunov exponents are non-negative has been presented firstly during the single neuron is in chaotic state. Secondly, a necessary condition for complete synchronization of two electrical coupled identical Aihara neurons has been given and the 2-dimensional parameter-space plot that displays the values of the MSF has been obtained numerically. The simulations show that complete synchronization cannot be reached if the coupling strength is taken too much or too few. Finally, reasonability and effectiveness of the theoretical results are verified by designed numerical examples.

Key words: Aihara neuron; electrical synapse coupling; complete synchronization; master stability function; two-dimensional synchronized region

责任编辑 张 杓