DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.10.001

矩形张量的 S-型奇异值包含集[①]

桑彩丽[1,2]，　赵建兴[1]

1. 贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025；2. 贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要： 利用矩形张量 $\boldsymbol{A}$ 的指标集的一个划分——非空真子集 S 及其补集、分类讨论思想和三角不等式，研究了 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值定位问题，得到了 $\boldsymbol{A}$ 的 S-型奇异值包含集.

关　键　词： 矩形张量；奇异值；定位；S-型；包含集

中图分类号： O151.21　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2019)10-0001-04

矩形张量奇异值问题是张量谱理论研究的主要课题之一，对其进行的研究主要集中在 3 个方面：一是对奇异值的性质进行研究[1-3]；二是对某些特殊奇异值(如按模最大奇异值)进行估计或计算[4-8]；三是对所有奇异值进行定位，即在复平面上给出所有奇异值的包含集[9-12]. 最近，张量奇异值定位问题引起了广泛关注并获得了一些初步结果. 文献[10]利用对左、右特征向量的按模最大分量进行分类讨论的思想首次给出了张量奇异值包含集. 随后，文献[11]利用对矩形张量指标集的划分给出了奇异值的一个 S-型包含集. 文献[12]利用图的弱连通性给出了奇异值的一个新包含集. 本文继续考虑张量奇异值定位问题，拟综合利用文献[10-11]中的技巧和方法给出张量奇异值的更精确的 S-型包含集. 新包含集的优势是在不增加额外计算量的情形下，仅对文献[10-11]中的某些包含集取交集就可得到比文献[10-12]中包含集更精确的包含集.

1　预备知识

用 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 表示实(复)数集，p,q,m,n 为正整数，$m,n\geqslant 2$，且 $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 记 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q})$，若

$$a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\in\mathbb{R}\qquad 1\leqslant i_1,\cdots,i_p\leqslant m\qquad 1\leqslant j_1,\cdots,j_q\leqslant n$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 (p,q) 阶 $m\times n$ 维实矩形张量，记作 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{[p,q;m,n]}$. 若存在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 满足方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p-1}\boldsymbol{y}^{q}=\lambda\boldsymbol{x}^{[l-1]} & (1)\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p}\boldsymbol{y}^{q-1}=\lambda\boldsymbol{y}^{[l-1]} & (2)\end{cases}$$

则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为相应于 λ 的左、右特征向量，其中 $l=p+q$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p-1}\boldsymbol{y}^{q}$ 和 $\boldsymbol{x}^{[l-1]}$ 为 m 维向量，它们的第 i 个分量为

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p-1}\boldsymbol{y}^{q})_i=\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\ \sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}\qquad(\boldsymbol{x}^{[l-1]})_i=x_i^{l-1}$$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p}\boldsymbol{y}^{q-1}$ 和 $\boldsymbol{y}^{[l-1]}$ 为 n 维向量，它们的第 j 个分量为

---

① 收稿日期：2018-06-30

基金项目：贵州省教育厅科技拔尖人才支持项目(黔教合 KY 字[2016]066 号)；国家自然科学基金项目(11501141).

作者简介：桑彩丽(1988-)，女，讲师，主要从事数值代数的研究.

通信作者：赵建兴，教授.

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p}\boldsymbol{y}^{q-1})_j=\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}x_{i_1}\cdots x_{i_p}y_{j_2}\cdots y_{j_q}\qquad (\boldsymbol{y}^{[l-1]})_j=y_j^{l-1}$$

弹性张量是满足 $p=q=2$ 且 $m=n=2,3$ 的矩形张量，其在非线性弹性材料学中有着重要的应用[1]. 文献[10]就 $m=n$ 这种情形对矩形张量的奇异值进行了定位，给出了如下包含集定理：

定理 1[10]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{[p,q;n,n]}$，则

$$\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq\Omega(\boldsymbol{A})=\bigcup_{i,j\in N,\ i\neq j}(\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})\cup\tilde{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A}))$$

其中 $\sigma(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的所有奇异值所成的集合，

$$\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})=\{z\in\mathbb{C}:(|z|+|a_{ij\cdots jj\cdots j}|-R_i(\boldsymbol{A}))|z|\leqslant|a_{ij\cdots jj\cdots j}|\max\{R_j(\boldsymbol{A}),C_j(\boldsymbol{A})\}\}$$

$$\tilde{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})=\{z\in\mathbb{C}:(|z|+|a_{j\cdots jij\cdots j}|-C_i(\boldsymbol{A}))|z|\leqslant|a_{j\cdots jij\cdots j}|\max\{R_j(\boldsymbol{A}),C_j(\boldsymbol{A})\}\}$$

$$R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\in N}|a_{ii_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}|$$

$$C_j(\boldsymbol{A})=\sum_{i_1,\cdots,i_p,j_2,\cdots,j_q\in N}|a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}|$$

为了减少计算量，文献[11]通过划分 N 为非空真子集 S 及其补集 $\overline{S}$ 给出了如下 S-型奇异值包含集定理：

定理 2[11]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{[p,q;n,n]}$，$S$ 为 N 的非空真子集，$\overline{S}$ 为 S 在 N 中的补集，则

$$\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq\Omega^S(\boldsymbol{A})=\Big[\bigcup_{i\in S,\ j\in\overline{S}}(\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})\cup\tilde{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A}))\Big]\cup\Big[\bigcup_{i\in\overline{S},\ j\in S}(\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})\cup\tilde{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A}))\Big]$$

2　主要结果

定理 3　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{[p,q;n,n]}$，$S$ 为 N 的非空真子集，$\overline{S}$ 为 S 在 N 中的补集，则

$$\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq\gamma^S(\boldsymbol{A})=\Big[\bigcup_{i\in S}\bigcap_{j\in\overline{S}}(\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})\cup\tilde{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A}))\Big]\cup\Big[\bigcup_{i\in\overline{S}}\bigcap_{j\in S}(\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})\cup\tilde{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A}))\Big]$$

证　设 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 分别为 λ 对应的左、右特征向量，

$$|x_s|=\max_{i\in S}\{|x_i|\}\qquad |x_t|=\max_{i\in\overline{S}}\{|x_i|\}$$

$$|y_g|=\max_{i\in S}\{|y_i|\}\qquad |y_h|=\max_{i\in\overline{S}}\{|y_i|\}$$

$$V_{\max}=\max_{i\in N}\{|x_i|,|y_i|\}$$

则 $|x_s|$ 和 $|x_t|$ 中至少有一个是正数，$|y_g|$ 和 $|y_h|$ 中至少有一个是正数. 下面分 4 种情形来证明.

情形 1　假设 $V_{\max}=|x_s|$，则 $|x_s|>0$. 任取 $j\in\overline{S}$，(1) 式的第 s 个方程可写为

$$\lambda x_s^{l-1}=\sum_{(i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j,j,\cdots,j)}a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}+a_{sj\cdots jj\cdots j}x_j^{p-1}y_j^{q}\tag{3}$$

情形 1.1　若 $|x_j|\geqslant|y_j|$，则对(3)式取模，并应用三角不等式，得

$$\begin{aligned}|\lambda||x_s|^{l-1}\leqslant&\sum_{(i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j,j,\cdots,j)}|a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_p}||y_{j_1}|\cdots|y_{j_q}|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}||x_j|^{p-1}|y_j|^{q}\leqslant\\&\sum_{(i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j,j,\cdots,j)}|a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}||x_s|^{l-1}+|a_{sj\cdots jj\cdots j}||x_j|^{l-1}=\\&(R_s(\boldsymbol{A})-|a_{sj\cdots jj\cdots j}|)|x_s|^{l-1}+|a_{sj\cdots jj\cdots j}||x_j|^{l-1}\end{aligned}$$

即

$$(|\lambda|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}|-R_s(\boldsymbol{A}))|x_s|^{l-1}\leqslant|a_{sj\cdots jj\cdots j}||x_j|^{l-1}\tag{4}$$

若(4)式中 $|x_j|>0$，则由(1)式的第 j 个方程

$$\lambda x_j^{l-1}=\sum_{i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\in N}a_{ji_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}$$

得

$$|\lambda||x_j|^{l-1}\leqslant\sum_{i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\in N}|a_{ji_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_p}||y_{j_1}|\cdots|y_{j_q}|\leqslant R_j(\boldsymbol{A})|x_s|^{l-1}\tag{5}$$

将(4)式和(5)式相乘，并消去 $|x_s|^{l-1}|x_j|^{l-1}>0$，可得

$$(|\lambda|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}|-R_s(\boldsymbol{A}))|\lambda|\leqslant|a_{sj\cdots jj\cdots j}|R_j(\boldsymbol{A}) \tag{6}$$

若(4)式中 $|x_j|=0$，则由 $|x_s|>0$ 得

$$|\lambda|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}|-R_s(\boldsymbol{A})\leqslant 0$$

此时(6)式仍成立.

情形 1.2　若 $|y_j|>|x_j|$，类似地可得

$$(|\lambda|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}|-R_s(\boldsymbol{A}))|x_s|^{l-1}\leqslant|a_{sj\cdots jj\cdots j}||y_j|^{l-1} \tag{7}$$

若(7)式中 $|y_j|>0$，由(2)式的第 j 个方程

$$\lambda y_j^{l-1}=\sum_{i_1,\cdots,i_p,j_2,\cdots,j_q\in N}a_{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q}x_{i_1}\cdots x_{i_p}y_{j_2}\cdots y_{j_q}$$

得

$$|\lambda||y_j|^{l-1}\leqslant\sum_{i_1,\cdots,i_p,j_2,\cdots,j_q\in N}|a_{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q}||x_{i_1}|\cdots|x_{i_p}||y_{j_2}|\cdots|y_{j_q}|\leqslant C_j(\boldsymbol{A})|x_s|^{l-1} \tag{8}$$

将(7)式和(8)式相乘，并消去 $|x_s|^{l-1}|y_j|^{l-1}>0$，可得

$$(|\lambda|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}|-R_s(\boldsymbol{A}))|\lambda|\leqslant|a_{sj\cdots jj\cdots j}|C_j(\boldsymbol{A}) \tag{9}$$

若(7)式中 $|y_j|=0$，则由 $|x_s|>0$ 得

$$|\lambda|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}|-R_s(\boldsymbol{A})\leqslant 0$$

此时(9)式仍成立.

由(6)式和(9)式得

$$(|\lambda|+|a_{sj\cdots jj\cdots j}|-R_s(\boldsymbol{A}))|\lambda|\leqslant|a_{sj\cdots jj\cdots j}|\max\{R_j(\boldsymbol{A}),C_j(\boldsymbol{A})\}$$

此时 $\lambda\in\hat{\gamma}_{s,j}(\boldsymbol{A})$. 由 $j\in\overline{S}$ 的任意性得 $\lambda\in\bigcap\limits_{j\in\overline{S}}\hat{\gamma}_{s,j}(\boldsymbol{A})$. 由 $s\in S$ 得 $\lambda\in\bigcup\limits_{i\in S}\bigcap\limits_{j\in\overline{S}}\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})$.

类似于情形 1 的证明，可完成其它 3 种情形的证明：

情形 2　假设 $V_{\max}=|y_g|$，此时 $\lambda\in\bigcup\limits_{i\in S}\bigcap\limits_{j\in\overline{S}}\tilde{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})$.

情形 3　假设 $V_{\max}=|x_t|$，此时 $\lambda\in\bigcup\limits_{i\in\overline{S}}\bigcap\limits_{j\in S}\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})$.

情形 4　假设 $V_{\max}=|y_h|$，此时 $\lambda\in\bigcup\limits_{i\in\overline{S}}\bigcap\limits_{j\in S}\hat{\gamma}_{i,j}(\boldsymbol{A})$.

由定理 1、定理 2 和定理 3 易得如下比较定理：

定理 4　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{[p,q;n,n]}$，$S$ 为 N 的非空真子集，$\overline{S}$ 为 S 在 N 中的补集，则

$$\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq\gamma^S(\boldsymbol{A})\subseteq\Omega^S(\boldsymbol{A})\subseteq\Omega(\boldsymbol{A})$$

3　数值算例

例 1　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{[2,2;3,3]}$，其中 $a_{1111}=a_{1122}=a_{1133}=a_{1222}=a_{1231}=a_{1233}=a_{1313}=a_{1322}=a_{1323}=a_{1132}=a_{2113}=a_{2122}=a_{2123}=a_{2213}=a_{2323}=a_{2331}=a_{2333}=a_{3113}=a_{3121}=a_{3123}=a_{3131}=a_{3211}=a_{3223}=a_{3313}=a_{3321}=a_{3323}=a_{3332}=1$，$a_{2111}=a_{2133}=a_{2222}=a_{2312}=a_{2332}=a_{3112}=a_{3122}=a_{3132}=a_{3133}=a_{3212}=a_{3213}=a_{3221}=a_{3222}=a_{3231}=a_{3232}=a_{3233}=a_{3311}=a_{3322}=a_{3331}=2$，$a_{3333}=3$，$a_{1131}=9$，$a_{2131}=10$，$a_{2121}=14$，其余元素均为 0. 下面对 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值进行定位.

取 $S=\{3\}$，$\overline{S}=\{1,2\}$，由定理 1 和定理 2 均得

$$\Omega^S(\boldsymbol{A})=\Omega(\boldsymbol{A})=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 46\}$$

由文献[12]中定理 3.3 得

$$T(\boldsymbol{A})=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 43.428\ 1\}$$

由定理 3 得

$$\gamma^S(\boldsymbol{A})=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 41.155\ 0\}$$

显然 $\gamma^S(\boldsymbol{A})\subseteq T(\boldsymbol{A})\subseteq\Omega^S(\boldsymbol{A})\subseteq\Omega(\boldsymbol{A})$.

例1表明：由定理3得到的张量奇异值包含集比由文献[10]中定理2.2、文献[11]中定理1和文献[12]中定理3.3得到的包含集精确.

例2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{[2,2;2,2]}$，其中 $a_{1111}=a_{1112}=a_{1222}=a_{2112}=a_{2121}=a_{2221}=1$，其余元素均为0. 经计算得所有奇异值为 ± 3，$\pm 1.6774 \pm 0.6722i$，$\pm 1.2452 \pm 0.6322i$，$\pm 1.1417 \pm 0.2018i$，$\pm 1.0682 \pm 1.2175i$，± 1，$\pm 0.8599 \pm 0.5072i$，± 0.8226，$\pm 0.3373 \pm 1.8125i$，$\pm 0.2090 \pm 1.0372i$，$\pm 0.1378 \pm 1.2530i$，0. 取 $S=\{1\}$，$\overline{S}=\{2\}$，由定理3得 $\gamma^S(\boldsymbol{A})=\{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant 3\}$. 显然 $\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq \gamma^S(\boldsymbol{A})$.

例2表明：由定理3得到的张量奇异值包含集可以恰好包含所有的奇异值.

参考文献：

[1] CHANG K, QI L Q, ZHOU G L. Singular Values of a Real Rectangular Tensor [J]. J Math Anal Appl, 2010, 370(1): 284-294.

[2] YANG Y N, YANG Q Z. Singular Values of Nonnegative Rectangular Tensors [J]. Front Math China, 2011, 6(2): 363-378.

[3] 聂祥荣，郭爱丽，武玲玲. 广义 Hadamard 延拓矩阵的奇异值分解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(8): 1-5.

[4] ZHOU G L, CACCETTA L, QI L Q. Convergence of an Algorithm for the Largest Singular Value of a Nonnegative Rectangular Tensor [J]. Linear Algebra Appl, 2013, 438(2): 959-968.

[5] JOHNSON C R, PENA J M, SZULC T. Optimal Gersgorin-Style Estimation of the Largest Singular Value II [J]. Electronic J Linear Algebra, 2016, 31(1): 679-685.

[6] 赵建兴. 非负矩形张量最大奇异值的上界估计[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(6): 1481-1484.

[7] 钟 琴. 非负矩阵最大特征值的新界值[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(2): 40-43.

[8] 桑彩丽，赵建兴. 非负矩形张量最大奇异值的 S-型上界[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(6): 1-5.

[9] HE J, LIU Y M, TIAN J K, et al. New Inclusion Sets for Singular Values [J]. J Inequal Appl, 2017, 2017: 64.

[10] ZHAO J X, LI C Q. Singular Value Inclusion Sets for Rectangular Tensors [J]. Linear Multilinear Algebra, 2018, 66(7): 1333-1350.

[11] SANG C L. An S-Type Singular Value Inclusion Set for Rectangular Tensors [J]. J Inequal Appl, 2017, 2017: 141.

[12] YAO H M, ZHANG C, LIU L, et al. Singular Value Inclusion Sets of Rectangular Tensors [J]. Linear Algebra Appl, 2019, 576: 181-199.

An S-Type Singular Value Inclusion Set for Rectangular Tensors

SANG Cai-li[1,2], ZHAO Jian-xing[1]

1. College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China;

2. School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: By breaking the index set of a rectangular tensor $\boldsymbol{A}$ into disjoint a nonempty proper subset and its complement, and by classification discussion idea and triangle inequality, the location for singular values of $\boldsymbol{A}$ has been studied, and an S-type singular value inclusion set of $\boldsymbol{A}$ has been obtained.

Key words: rectangular tensors; singular values; locations; S-type; inclusion sets

责任编辑 廖 坤