DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.10.002

具有特殊特征标维数的有限 p-群[①]

薛海波[1]，　吕　恒[2]

1. 重庆人文科技学院 机电与信息工程学院，重庆 合川 401524；
2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要研究了特征标维数集合是$\{1, p^m\}$的有限 p-群G，证明了若这类有限 p-群G 的幂零类大于或者等于 3，则$|G|\geqslant p^{3m+1}$．特别地，如果 G 的特征标维数集合与共轭类长度集合都是$\{1, p^m\}$，那么 G 的幂零类是 2 且 $|G|\geqslant p^{3m}$．

关　键　词： 有限 p-群；特征标；共轭类

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2019)10-0005-03

有限群的特征标维数集合与有限群的共轭类长度集合都对有限群的结构和性质有密切的影响．文献[1-2]研究了特征标维数集合是 $\mathrm{cd}(G)=\{1, n\}$ 的有限群，并给出了当群 G 是非幂零群时的结构的基本刻画；同时当 G 是幂零群时，只需要考虑 G 是有限 p-群，并证明了这类有限 p-群的幂零类小于或者等于 p．关于 $\mathrm{cd}(G)=\{1, p^m\}$ 的有限 p-群的分类，目前还是一个公开的研究问题．

关于群的元素的共轭类也有类似的研究．文献[3-7]研究了具有特殊共轭类长度集合 $\mathrm{cs}(G)=\{1, n_1, \cdots n_s\}$ 的有限群 G，并分别给出了共轭类长度集合只有 2,3,4 的群的结构的刻画．即：若 $|\mathrm{cs}(G)|=2$，则 G 是有限 p-群与交换群的直积；若 $|\mathrm{cs}(G)|=3$，则 G 是有限可解群；若 $|\mathrm{cs}(G)|=4$ 且 G 是单群，则 $G\cong PSL(2, 2^n)$．文献[8]进一步研究了满足 $\mathrm{cs}(G)=\{1, p^m\}$ 的有限 p-群 G，证明了这类群幂零类至多是 3．文献[9]证明了任意有限群其所有的非单位元中共轭类长度最小的元生成的子群幂零类至多为 3．

本文先考虑特征标维数集合 $\mathrm{cd}(G)=\{1, p^m\}$ 的有限 p-群，给出了满足这类条件的，且幂零类大于等于 3 的群的阶的下界是 p^{3m+1}，同时还对特征标维数集合和共轭类长度集合是一样的有限 p-群进行了简单研究，证明了若有限 p-群的特征标维数集合和共轭类长度集合都是$\{1, p^m\}$时，其幂零类为2，且阶大于或者等于 p^{3m}．

引理 1[6]　设群 G 是有限 p-群且 $|G'|=p$．则 $G=(A_1 * A_2 * \cdots * A_s)Z(G)$，其中 $*$ 表示中心积，$A_1, \cdots, A_s$ 是内交换 p-群．

定理 1　设 G 是有限非交换 p-群，满足 $\mathrm{cd}(G)=\{1, p^m\}$．若 G 的幂零类大于或者等于 3，则 $|G|\geqslant p^{3m+1}$．

证　取群 G 的正规子群 N，使得 N 包含在 G' 中，且 $|G':N|=p$．由于 $\mathrm{cd}(G/N)=\{1, p^m\}$，于是 $|G/N:Z(G/N)|=p^{2m}$，进而可得 $|G:G'|\geqslant p^{2m}$．

下面证明 $|G'/K_3(G)|\geqslant p^m$．若不然，假设 $|G'|\leqslant p^m$．由文献[1]可得 $G'/K_3(G)$ 是初等交换 p-子群．因此存在 M 是群 G 的正规子群，使得 $M\leqslant G'$ 且满足 $|K_3(G/M)|=p$．由此可得

---

① 收稿日期：2019-01-06
基金项目：国家自然科学基金项目(11471266)．
作者简介：薛海波(1980-)，女，副教授，主要从事群论的研究．
通信作者：吕　恒，教授．

$$K_3(G/M) \leqslant Z(G/M)$$

同时对任意 $\bar{x} \in (G/M)' - K_3(G/M)$，$\bar{x} \notin Z(G/M)$. 因此不妨假设群满足

$$|K_3(G)| = p \qquad G' \cap Z(G) = K_3(G)$$

对任意 $x_i \in G' - K_3(G)$，易得 $\langle x_i, K_3(G)\rangle = K_i$ 是阶为 p^2 的正规子群，进而可得 $|G : C_G(K_i)| = p$. 假设 $|G'| = p^s$，于是可以得到 $|G : C_G(G')| \leqslant p^{s-1}$. 设 $y \in G - C_G(G')$，令子群 $C = C_G(y)$. 则 $T = C \cap G'$ 是 G' 的真子群，且 $|T| \leqslant p^{m-1}$. 易得 $K_3(G) \leqslant T$，因此 $T \trianglelefteq G$. 又因

$$CG'/T \cong C/T \times G'/T$$

由于 $CG'/G' \cong C/T$，故该群是交换群. 又根据假设，G 的幂零类是 3，即 G' 是交换群. 于是可得 CG'/T 是群 G/T 的交换正规子群.

由 G' 是交换子群可知 $y \in G - G'$. 由于商群 G/N 满足 $|(G/N)'| = p$，则由引理 1 可得

$$|C_{G/N}(yN)| = p^{-1}|G/N| = |G/G'|$$

又由文献[7]的推论 2.24 可得

$$|C| = |C_G(y)| \geqslant |C_{G/N}(yN)| = |G/G'|$$

因此有

$$|G/T : CG'/T| = (|G|/|G'|)(|T|/|C|) \leqslant |T| < p^m$$

由 G/T 是非交换群，且 $\mathrm{cd}(G/T) = \{1, p^m\}$，因此由文献[7]的定理 6.15 可得 G/T 不存在指数小于 p^m 的交换正规子群，矛盾. 故 $|G'/K_3(G)| \geqslant p^m$，进而 $|G| \geqslant p^{3m+1}$.

定理 1 取得的结果也许还可以更进一步. 文献[2]已经证明了特征标维数集合是 $\mathrm{cd}(G) = \{1, p^m\}$ 的有限 p-群，其幂零类小于等于 p. 因此我们有猜测：

猜测 1　若有限 p-群 G 的幂零类 $c \leqslant p$ 且 $\mathrm{cd}(G) = \{1, p^m\}$，是否 $|G| \geqslant p^{cm+1}$?

下面我们研究特征标维数集合与元素的共轭类长度集合都是 $\{1, p^m\}$ 的有限 p-群.

引理 2　设群 G 是有限 p-群，且满足

$$\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cs}(G) = \{1, p^{n_1}, p^{n_2}, \cdots, p^{n_s}\}$$

其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$. 令子群

$$M = \langle x \in G \mid |G : C_G(x)| = p^{n_1}\rangle$$

则 M 的幂零类至多是 2.

证　对任意 $x \in G - Z(G)$ 且 $|G : C_G(x)| = p^{n_1}$，令子群 $H = C_G(x)$. 因此 H 的主特征标在群 G 的诱导特征标满足

$$[1_G, (1_H)^G] = [(1_G)_H, 1_H] = 1$$

又因

$$(1_H)^G(1) = |G : H| = p^m$$

于是可得 $(1_H)^G$ 的不可约成分都是群 G 的线性特征标. 故 $G' < \mathrm{Ker}(1_H)^G$. 又因

$$\mathrm{Ker}(1_H)^G = \bigcap_{x \in G} H^x = H_G$$

从而可得 $G' \leqslant H$. 于是由 x 的任意性可得

$$[G', M] = 1$$

因此 $[M', M] = 1$，即 M 的幂零类是 2.

定理 2　设 G 是有限非交换 p-群，$\mathrm{cd}(G) = \{1, p^m\} = \mathrm{cs}(G)$. 则 G 的幂零类等于 2，且 $|G| \geqslant p^{3m}$.

证　显然 $G = MZ(G)$，其中 M 是非中心的元生成的正规子群. 由引理 2，G 的幂零类是 2. 又由文献[2]可知 G' 是初等交换子群. 因为 $|G : H| = p^m$，则可得 $|[\langle x\rangle, G]| \geqslant p^m$. 于是 $|G'| \geqslant p^m$，故 $|G| \geqslant p^{3m}$.

本文只得到定理 2 这种特殊情况. 对于一般情况，我们也有如下猜测：

猜测 2　设群 G 是有限 p-群，且满足 $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cs}(G) = \{1, p^{n_1}, p^{n_2}, \cdots, p^{n_s}\}$，其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$. 是否 G 的幂零类至多是 $s+1$?

例如有下面的简单群例：

例 1　群 $G = \langle a, b \mid a^{p^3} = b^{p^2} = 1, a^b = a^{1+p}\rangle$. 易得 $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cs}(G) = \{1, p, p^2\}$，且 G 的幂零类是 3.

参考文献：

[1] ISAACS I M，PASSMAN D S. A Characterization of Groups in Terms of the Degrees of Their Characters [J]. Pacific J Math，1965，15：877-903.

[2] ISAACS I M，PASSMAN D S. A Characterization of Groups in Terms of the Degrees of Their Characters II [J]. Pacific J Math，1968，24：467-510.

[3] ITO N. On Finite Groups with Given Conjugate Types I [J]. Nagoya Math J，1953(6)：17-28.

[4] ITO N. On Finite Groups with Given Conjugate Types II [J]. Osaka J Math，1970(7)：231-251.

[5] ITO N. On Finite Groups with Given Conjugate Types III [J]. Math Z，1970，117：267-271.

[6] BERKOVICH Y. Groups of Prime Power Order(Vol. 1) [M]. Berlin：Walter de Gruyter，2008.

[7] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. New York：Dover，1994.

[8] ISHIKAWA K. On Finite p-Groups which Have Only Two Conjugacy Lengths [J]. Israel J Math，2002，129(1)：119-123.

[9] MANN A. Elements of Minimal Breadth in Finite p-Groups and Lie Algebras [J]. J Aust Math Soc，2006，81(2)：209-214.

Finite p-Groups with Special Degrees of Character

XUE Hai-bo[1]，　LÜ　Heng[2]

1. *College of Electromechanical and Information Engineering，Chongqing College of Humanities，Science and Technology，Hechuan Chongqing 401524，China；*

2. *School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China*

Abstract：In this paper，we study a finite p-groups with $\mathrm{cd}(G)=\{1,\ p^m\}$. We prove that $|G|\geqslant p^{3m+1}$ if the nilpotent class of G is greater than 2. Especially，if $\mathrm{cd}(G)=\{1,\ p^m\}=\mathrm{cs}(G)$，then the nilpotent class of G is 2 and $|G|\geqslant p^{3m}$.

Key words：finite p-group；character；conjugacy classes

责任编辑　廖　坤