DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.10.003

Sylow 2-子群可补的有限群[①]

黄 宇, 周 伟

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 设 G 是有限群,$H \leqslant G$. 如果 G 中存在子群 $K \leqslant G$ 满足 $G = KH$,且 $H \cap K = 1$,那么称 H 在 G 中可补. 通过研究 G 的 Sylow 2-子群的可补性,证明了:设 G 为有限群,$|G| = 2^a t$,$(2, t) = 1$,若 G 的 Sylow 2-子群可补且 G 是 $PSL_2(p^r)$-自由的,$p^r = 2^a - 1$,其中 p 为素数,r 为正整数,则 G 可解.

关 键 词: 可补子群;可解;Sylow 子群

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)10-0008-03

本文所讨论的群都是有限群,其它符号都是标准的(见文献[1-2]).

设 G 是有限群,$H \leqslant G$. 如果 G 中存在子群 $K \leqslant G$,满足 $G = KH$,且 $H \cap K = 1$,那么称 H 在 G 中可补. 研究子群的可补性对有限群结构和性质的影响是群论研究中十分重要的课题. 文献[3]证明了 G 可解当且仅当 G 的所有 Sylow 子群在 G 中可补. 文献[4]证明了 G 可解当且仅当 G 的 Sylow 2-子群和 Sylow 3-子群在 G 中可补. 其它相关研究见文献[5-10]. 由此可见,G 的 Sylow 2-子群可补对 G 的可解性有重要影响. 但是由 $PSL_2(7)$ 知道:Sylow 2-子群可补一般不能得到可解性. 本文得到:设 G 为有限群,若 G 的 Sylow 2-子群交换且可补,则 G 可解. 由于 G 的每个 Sylow 2-子群交换,我们对条件进行弱化,证明了:设 G 为有限群,$|G| = 2^a t$,$(2, t) = 1$,若 G 的 Sylow 2-子群可补且 G 是 $PSL_2(p^r)$-自由的,$p^r = 2^a - 1$,其中 p 为素数,r 为正整数,则 G 可解.

引理 1[11] 设 r 是素数,

(i) $SL_2(p^f)$ 的 Sylow r-子群,当 $2 \neq r \neq p$ 时是循环群;当 $2 = r \neq p$ 时是广义四元数群;当 $r = p$ 时是初等交换群;

(ii) 当 $2 \neq r$ 时,$PSL_2(p^f)$ 的 Sylow r-子群同构于 $SL_2(p^f)$ 的 Sylow r-子群;当 $2 \neq p$ 时,$PSL_2(p^f)$ 的 Sylow 2-子群是二面体群.

引理 2[11] 设 $q = p^a$,则 $PSL_2(q)$ 的子群同构于下列子群:

(i) 阶为 $\dfrac{2(q \pm 1)}{d}$ 的二面体群,其中 $d = (2, q \pm 1)$;

(ii) $H \leqslant G$,$|H| = \dfrac{q(q-1)}{d}$,$Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$,Q 是初等交换群,$Q \trianglelefteq H$,H/Q 是循环群,$|H/Q| = \dfrac{q-1}{d}$;

(iii) A_4, S_4, A_5;

(iv) $PSL_2(r)$,$PGL_2(r)$,其中 $r = p^t$,$r^m = q$.

① 收稿日期:2018-12-14
基金项目:国家自然科学基金项目(11671324).
作者简介:黄 宇(1993-),女,硕士研究生,主要从事群论的研究.
通信作者:周 伟,副教授.

引理 3[12]　设 G 是有限非交换单群，$H \leqslant G$，且 $|G:H| = p^a$，p 是素数．则下列情况之一成立：

(i) $G \cong A_n$，$H \cong A_{n-1}$，其中 $n = p^a$；

(ii) $G \cong PSL_n(q)$，$|G:H| = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = p^a$，其中 n 是素数；

(iii) $G \cong PSL_2(11)$，$H \cong A_5$；

(iv) $G \cong M_{23}$，$H \cong M_{22}$；$G \cong M_{11}$，$H \cong M_{10}$；

(v) $G \cong PSU_4(2)$，$|G:H| = 27$．

由引理 1 及引理 3，我们可得：

定理 1　设 G 为有限群，若 G 的 Sylow 2-子群交换且可补，则 G 可解．

证　对 $|G|$ 归纳．由假设，令 $P_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$，存在 $H \leqslant G$，有

$$G = P_2H \qquad P_2 \cap H = 1$$

其中 H 为 G 的 Hall $2'$-子群．

若 G 为交换单群时，显然 G 可解．下面说明当 G 不是交换单群时，G 非单群．

假设 G 为非交换单群，由引理 3 及 H 为 G 的 Hall $2'$-子群，只需验证引理 3 的情况(ii)．此时

$$G \cong PSL_n(q) \qquad |G:H| = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2^a$$

其中 n 是素数．由于$\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 2^a$，则

$$2^a(q - 1) = q^n - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$$

于是 $q \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$．又因

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$$

因此

$$n = 2 \qquad G \cong PSL_2(q) \qquad q + 1 = 2^a$$

于是，由引理 1 得 G 的 Sylow 2-子群为二面体群．因此，$a = 2$，$q = 3$，$G \cong PSL_2(3) \cong A_4$，矛盾．

显然定理条件是商群闭的，令 $1 \neq N \trianglelefteq G$，于是 G/N 可解．下证 N 可解．由于

$$H/H \cap N \cong HN/N$$

故 $|N:H \cap N| = |HN:H|$ 等于 2 的方幂．因此 $H \cap N$ 为 N 的 Hall $2'$-子群，$P_2 \cap N \in \mathrm{Syl}_2(N)$．从而

$$N = (P_2 \cap N)(H \cap N) \qquad (P_2 \cap N) \cap (H \cap N) = 1$$

显然，N 满足定理假设条件，故 N 可解，因此 G 可解．

由于 G 的每个 Sylow 2-子群交换，我们对条件进行了弱化．为此，我们首先给出 G 的 Sylow 2-子群可补时 G 的结构．

定理 2　设 G 为非交换单群，其中 $|G| = 2^at$，$(2, t) = 1$，则 G 的 Sylow 2-子群可补的充分必要条件是 $G \cong PSL_2(q)$，$q = 2^a - 1$．

证　*必要性*　由假设，存在 $H \leqslant G$，使得 $|G:H| = 2^a$．由引理 3 及 H 为 Hall $2'$-子群，我们只需要考虑 $G \cong A_n$ 和 $G \cong PSL_n(q)$ 这两种情况．

情况 1　$G \cong A_n$，$H \cong A_{n-1}$，其中 $n = 2^a$．由 H 可解，则 $n - 1 \leqslant 4$．又因 G 为单群，故 $n \geqslant 5$，从而 $n = 5$．但这与 $n = 2^a$ 矛盾．

情况 2　$G \cong PSL_n(q)$，$|G:H| = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 2^a$，其中 n 是素数．同定理 1 的证明，易得 $n = 2$，$q = 2^a - 1$．此时，$G \cong PSL_2(q)$，$q = 2^a - 1$．

充分性　若 $G \cong PSL_2(q)$，$q = 2^a - 1$．由引理 2 知，存在 $H \leqslant G$，$|H| = \dfrac{q(q - 1)}{2}$，则

$$|G:H| = q + 1 = 2^a$$

从而 H 为 G 的 Hall $2'$-子群，故 G 的 Sylow 2-子群可补．

如果 G 中不存在截断同构于 $PSL_2(q^r)$，则称 G 是 $PSL_2(p^r)$-自由的.

由上面的结论我们知道：当 $G \cong PSL_2(q)$，$q=2^a-1$ 时，G 的 Sylow 2-子群可补. 但是当 $q \geqslant 4$ 时，$PSL_2(q)$ 为单群. 于是我们得到了下面的结论：

定理 3 设 G 为有限群，$|G|=2^a t$，$(2,t)=1$. 若 G 的 Sylow 2-子群可补，且 G 是 $PSL_2(p^r)$-自由的，$p^r=2^a-1$，其中 p 为素数，r 为正整数，则 G 可解.

证 若 G 为交换单群，显然 G 可解. 下面说明当 G 不是交换单群时，G 非单群. 假设 G 为非交换单群，由定理 2，则 $G \cong PSL_2(q)$，$q=2^a-1$. 但 G 是 $PSL_2(q)$-自由的，此种情况矛盾.

显然定理条件是商群闭的，对 $|G|$ 归纳. 令 $1 \neq N \trianglelefteq G$，于是 G/N 可解. 类似定理 1 易证 N 可解. 因此 G 可解.

参考文献：

[1] 徐明曜. 有限群导引：上册 [M]. 2 版. 北京：科学出版社，1999：162-181.

[2] 杨子胥. 近世代数 [M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2011：29-120.

[3] HALL P. A Characteristic Property of Soluble Groups [J]. J Lond Math Soc，1937，S1-12(3)：198-200.

[4] ARAD Z，WARD M B. New Criteria for the Solvability of Finite Groups [J]. Journal of Algebra，1982，77(1)：234-246.

[5] HELIEL A. A Note on *c*-Supplemented Subgroups of Finite Groups [J]. Communications in Algebra，2014，42(4)：1650-1656.

[6] MIAO L，TANG J P. A New Condition for Solvable Groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2017，221(10)：2504-2510.

[7] 郭孝军，郭秀云. 某些素数幂阶子群可补的有限群 [J]. 上海大学学报(自然科学版)，2009，15(4)：369-374.

[8] 黄 宇，宋科研. 用不可补子群个数刻画单群 A_5 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：90-93.

[9] 陈 梦，陈贵云. 最高阶元的阶为 5 及 Sylow 2-子群的阶为 2，4，8 时的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：52-55.

[10] 陈 梦，刘正龙，陈贵云. 最高阶元的阶为 7 及 Sylow 2-子群的阶为 8 的有限群的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：22-25.

[11] [德]贝·胡佩特. 有限群论：第一卷 [M]. 姜 豪，俞曙霞，译. 福州：福建人民出版社，1992：221-257.

[12] GURALNICK R M. Subgroups of Prime Power Index in a Simple Group [J]. Journal of Algebra，1983，81(2)：304-311.

On Finite Group with Sylow 2-Subgroup Complemented

HUANG Yu， ZHOU Wei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Let G be a finite group，and H be a subgroup of G. If there exists a subgroup K of G such that $G=KH$ and $H \cap K=1$，then H is called complemented in G. We get the following results：Let G be a finite group，$|G|=2^a t$，$(2,t)=1$，if Sylow 2-subgroup of G is complemented and G is $PSL_2(p^r)$-free，$p^r=2^a-1$，where p is prime，r is positive integer，then G is solvable.

Key words：complemented subgroup；solvable；Sylow subgroup

责任编辑 廖 坤