第 44 卷 第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 10 月
Vol. 44 No. 10　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.10.005

积分微分 KP 层次方程的精确行波解①

宋佳谦，　刘小华

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要： 对 KP 层次方程进行积分变换和行波变换得到常微分方程，利用扩展试验方程法把求解常微分方程的问题转化为求解代数方程组的问题，根据不同情况得到了 KP 层次方程的钟状解、三角函数解、双曲函数解和椭圆函数解的精确表达式，这些解的显示表达式是首次求出的. 这种方法对于求解非线性偏微分方程十分有效并且能够得到许多新的精确解.

关 键 词： 扩展试验方程法；KP 层次方程；行波解

中图分类号：O175.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)10-0016-07

非线性偏微分方程在数学、物理、化学以及其它学科和工程领域起着非常重要的作用. 很多学者研究了非线性偏微分方程，因此许多求解非线性偏微分方程的方法也发展起来. 比如 Jacobi 椭圆函数展开法[1]、辅助函数法[2]、指数函数法[3]、sine-cosine 法[4]、G'/G 展开法[5-6]、Bäcklund 变换法[7] 等. 扩展试验方程法是一种常用于求解非线性偏微分方程精确解的方法，文献[8] 利用扩展试验方程法得到了广义 Benjamin 方程和 Burger-Kdv 方程的精确行波解，文献[9] 通过扩展试验方程法考虑了非线性耦合 Schrodinger Boussinesq 偏微分方程的精确行波解.

本文主要探讨积分微分 KP 层次方程

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xxy} + \frac{1}{2}\partial_x^{-2}(u_{yyy}) + 2u_x\partial_x^{-1}(u_y) + 4uu_y \tag{1}$$

的精确行波解，其中

$$u = u(x, y, t) \qquad \partial_x^{-1} = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x$$

KP 层次方程在数学物理和工程中有许多重要的应用，是一类非常重要的非线性偏微分方程. 文献[10] 利用重复齐次平衡法得到了(3+1) 维 KP 方程的孤子解和周期解，文献[11] 通过 G'/G-展开法得到了(2+1) 维 KP 方程的行波解. 文献[12] 通过扩展 tanh 法得到了耦合 KP 方程的行波解. 我们将对方程(1) 进行积分变换，之后再对其进行行波变换，然后利用扩展试验方程法对方程(1) 的精确行波解进行研究.

1　方程(1) 的行波变换

在方程(1) 中做变换 $u = v_{xx}$，可将积分微分 KP 层次方程(1) 转换成如下的方程

① 收稿日期：2018-12-14
基金项目：贵州省科学技术厅项目(黔科合基础[2019]1162).
作者简介：宋佳谦(1993-)，女，硕士研究生，主要从事数学物理方法的研究.
通信作者：刘小华，教授.

$$v_{xxt}=\frac{1}{2}v_{xxxxy}+\frac{1}{2}v_{yyy}+2v_{xxx}v_{xy}+4v_{xx}v_{xxy} \tag{2}$$

对方程(2) 进行行波变换，再对其进行一次积分，令 $v(x,y,t)=v(\xi)$，其中 $\xi=x+y-kt$，k 是波速，方程(2) 可化为

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)v_{\xi\xi}+\frac{1}{2}v^{(4)}+3(v_{\xi\xi})^2+C=0 \tag{3}$$

其中 $v_{\xi\xi}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}$，$v^{(4)}=\dfrac{\partial^4 v}{\partial\xi^4}$，$C$ 是积分常数. 令 $w=v_{\xi\xi}$，方程(3) 可化为如下等价的方程

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)w+\frac{1}{2}w_{\xi\xi}+3w^2+C=0 \tag{4}$$

综上推导可知，方程(4) 的解为 $w=v_{\xi\xi}$，而方程(1) 的解为 $u=v_{xx}$，显然方程(1) 的解与方程(4) 的解具有相同形式. 为此下面只需对方程(4) 进行研究.

2　方程(1) 的精确行波解

上节给出了方程(1) 的积分变换和行波变换，本节将利用扩展试验方程法对方程(1) 的精确行波解进行研究. 首先给出扩展试验方程法的步骤.

2.1　扩展试验方程法

考虑如下的常微分方程

$$P(w^{(m)},w^{(m-1)},\cdots,w',w)=0 \tag{5}$$

步骤 1　假设方程(5) 有如下形式的解

$$w=\sum_{i=0}^{\delta}\tau_i Y^i \tag{6}$$

其中 $\tau_i(i=0,1,\cdots,\delta)$ 为待定系数，Y 满足如下方程

$$(Y')^2=\Lambda(Y)=\frac{\Phi(Y)}{\Psi(Y)}=\frac{\lambda_\theta Y^\theta+\lambda_{\theta-1}Y^{\theta-1}+\cdots+\lambda_1 Y+\lambda_0}{\zeta_\varepsilon Y^\varepsilon+\zeta_{\varepsilon-1}Y^{\varepsilon-1}+\cdots+\zeta_1 Y+\zeta_0} \tag{7}$$

τ_i,λ_i,ζ_i 是待常数，可以得到

$$w'=\frac{\Phi'(Y)\Psi(Y)-\Phi(Y)\Psi'(Y)}{2\Psi^2(Y)}\left(\sum_{i=0}^{\delta}i\tau_i Y^{i-1}\right)+\frac{\Phi(Y)}{\Psi(Y)}\left(\sum_{i=0}^{\delta}i(i-1)\tau_i Y^{i-2}\right) \tag{8}$$

$\Phi(Y),\Psi(Y)$ 是关于 Y 的多项式.

步骤 2　平衡最高阶导数项和最高阶非线性项，可得到 δ,ζ,λ 的关系.

步骤 3　把方程(6),(7) 代入方程(5) 得到关于 Y 的多项式，令 Y^i 的各项系数为 0，得到方程组，解方程组得到 τ_i,λ_i,ζ_i.

步骤 4　将方程(7) 转化为积分形式

$$\pm\xi=\int\frac{\mathrm{d}Y}{\sqrt{\Lambda(Y)}}=\int\sqrt{\frac{\Psi(Y)}{\Phi(Y)}}\mathrm{d}Y \tag{9}$$

根据(9) 式可以得到方程(5) 的行波解.

2.2　方程(1) 的精确行波解

根据方程(1) 与方程(4) 解之间的关系，先用扩展试验方程法对方程(4) 的精确行波解进行研究. 现在应用扩展试验方程法求解方程(4)，通过(6),(7),(8) 式可以得到

$$w=\tau_\delta Y^\delta+\tau_{\delta-1}Y^{\delta-1}+\cdots+\tau_0 \tag{10}$$

$$w^2=\tau_\delta^2 Y^{2\delta}+\cdots+2\tau_\delta\tau_{\delta-1}Y^{2\delta-1}+\cdots+\tau_0^2 \tag{11}$$

$$w'=\delta\tau_\delta Y^{\delta-1}Y'+(\delta-1)\tau_{\delta-1}Y^{\delta-2}Y'+\cdots+\tau_1 Y' \tag{12}$$

$$(w')^2 = (\delta\tau_\delta Y^{\delta-1} + \cdots + \tau_1)^2 \frac{\lambda_\theta Y^\theta + \lambda_{\theta-1} Y^{\theta-1} + \cdots + \lambda_0}{\zeta_\varepsilon Y^\varepsilon + \zeta_{\varepsilon-1} Y^{\varepsilon-1} + \cdots + \zeta_0} \tag{13}$$

$$w'' = \frac{(\delta\tau_\delta Y^{\delta-1} + \cdots + \tau_1)^2 \dfrac{\lambda_\theta Y^\theta + \lambda_{\theta-1} Y^{\theta-1} + \cdots + \lambda_0}{\zeta_\varepsilon Y^\varepsilon + \zeta_{\varepsilon-1} Y^{\varepsilon-1} + \cdots + \zeta_0}}{2\delta\tau_\delta Y^{\delta-1} Y' + 2(\delta-1)\tau_{\delta-1} Y^{\delta-2} Y' + \cdots + 2\tau_1 Y'} \tag{14}$$

利用齐次平衡法，可以得到 $\delta - 2 + \theta - \varepsilon = 2\delta$，即 $\delta = \theta - \varepsilon - 2$.

假设 $\varepsilon = 0$，$\theta = 3$，则 $\delta = 1$，于是有

$$w = \tau_0 + \tau_1 Y \tag{15}$$

$$w'' = \frac{\tau_1}{2\zeta_0}(3\lambda_3 Y^2 + 2\lambda_2 Y + \lambda_1) \tag{16}$$

把(15)，(16) 式代入方程(4)，合并同类项，令 $Y^m (m = 0,1,2)$ 的系数等于 0，得到代数方程组为

$$\begin{cases} 4\zeta_0 {\tau_1}^2 + \lambda_3 \tau_1 = 0 \\ \zeta_0 \tau_1 + 2\zeta_0 \tau_1 k + 12\zeta_0 \tau_0 \tau_1 + \lambda_2 \tau_1 = 0 \\ 4\zeta_0 C + 2\zeta_0 \tau_0 + 4\zeta_0 \tau_0 k + 12\zeta_0 {\tau_0}^2 + \lambda_1 \tau_1 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

解得

$$\begin{cases} \tau_1 = -\dfrac{\lambda_3}{4\zeta_0} \\ \tau_0 = \dfrac{\lambda_2 \pm \sqrt{48{\zeta_0}^2 C - 3\lambda_1\lambda_3 + {\lambda_2}^2}}{-12\zeta_0} \\ k = \dfrac{-\zeta_0 \pm \sqrt{48{\zeta_0}^2 C - 3\lambda_1\lambda_3 + {\lambda_2}^2}}{2\zeta_0} \end{cases} \tag{18}$$

根据方程(9) 可知

$$\pm\xi = \int \frac{\mathrm{d}Y}{\sqrt{\Lambda(Y)}} = \int \sqrt{\frac{\Psi(Y)}{\Phi(Y)}}\mathrm{d}Y = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\zeta_0}}\int \frac{\mathrm{d}Y}{\sqrt{Y^3 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}Y^2 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}Y + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_3}}} \tag{19}$$

其中 $\lambda_3\zeta_0 > 0$，为了对(19) 式进行积分，下面将讨论以下几种情况：

情况 1　若

$$Y^3 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}Y^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_3}Y + \frac{\lambda_0}{\lambda_3} = (Y - \alpha)^3 \tag{20}$$

α 是非零常数，等式两边系数相等，得到

$$\begin{cases} \lambda_2 = -3\alpha\lambda_3 \\ \lambda_1 = 3\alpha^2\lambda_3 \\ \lambda_0 = -\alpha^3\lambda_3 \end{cases} \tag{21}$$

把(21) 式代入(18) 式，得到

$$\begin{cases} \tau_1 = -\dfrac{\lambda_3}{4\zeta_0} \\ \tau_0 = \dfrac{-3\alpha\lambda_3 \pm 4\zeta_0\sqrt{3C}}{-12\zeta_0} \\ k = -\dfrac{1}{2} \pm 2\sqrt{3C} \end{cases} \tag{22}$$

$\lambda_3, \zeta_0, \alpha, C$ 为任意常数

$$\pm\xi = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\zeta_0}}\int \frac{\mathrm{d}Y}{\sqrt{(Y-\alpha)^3}} = -\sqrt{\frac{\lambda_3}{\zeta_0}}\frac{2}{\sqrt{Y-\alpha}} \tag{23}$$

得到

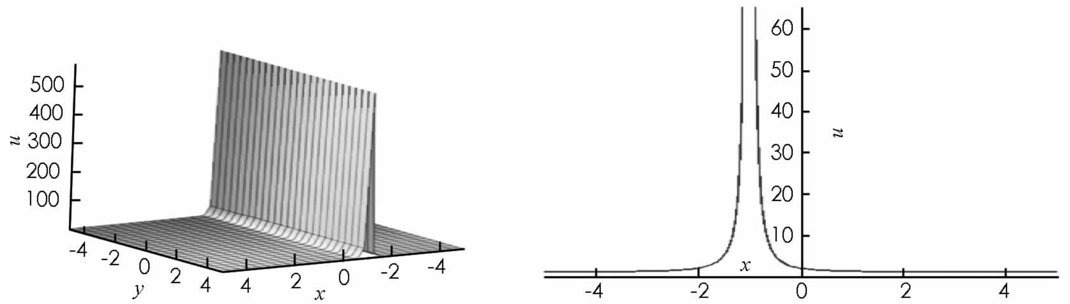
$$Y=\alpha+\frac{4\lambda_3}{\xi^2\zeta_0} \tag{24}$$

把(22),(24)式代入方程(15)，得到方程(1)的钟状解 u_1（图 1），

$$u_1=\mp\frac{\sqrt{3C}}{3}+\frac{\lambda_3^2}{\xi^2\zeta_0^2} \tag{25}$$

其中

$$k=-\frac{1}{2}\pm2\sqrt{3C}\qquad\xi=x+y-kt\qquad\lambda_3\zeta_0>0$$



(a) $t=0,\lambda_3=\zeta_0=1$时的解　(b) $t=0,y=1,\lambda_3=\zeta_0=1$时的解

图 1　方程(1)的解 u_1

情况 2　若

$$Y^3+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}Y^2+\frac{\lambda_1}{\lambda_3}Y+\frac{\lambda_0}{\lambda_3}=(Y-\alpha_1)^2(Y-\alpha_2) \tag{26}$$

其中 α_1,α_2 是非零常数，等式两边系数相等，得到

$$\begin{cases}\lambda_2=-3\lambda_3(2\alpha_1+\alpha_2)\\ \lambda_1=\lambda_3(2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2)\\ \lambda_0=-\lambda_3\alpha_1^2\alpha_2\end{cases} \tag{27}$$

把(27)式代入(18)式，得到

$$\begin{cases}\tau_1=-\dfrac{\lambda_3}{4\zeta_0}\\ \tau_0=\dfrac{\lambda_3(2\alpha_1+\alpha_2)\pm\sqrt{48\zeta_0{}^2C+\lambda_3{}^2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}{12\sigma_0}\\ k=\dfrac{-\zeta_0\pm\sqrt{48\zeta_0{}^2C+\lambda_3{}^2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}{2\zeta_0}\end{cases} \tag{28}$$

$\lambda_3,\zeta_0,C,\alpha_1,\alpha_2$ 为任意常数.

当 $\alpha_2>\alpha_1$ 时，

$$\pm\xi=\sqrt{\frac{\lambda_3}{\zeta_0}}\int\frac{\mathrm{d}Y}{(Y-\alpha_1)\sqrt{Y-\alpha_2}}=2\sqrt{\frac{\lambda_3}{\zeta_0(\alpha_2-\alpha_1)}}\arctan\left(\frac{\sqrt{Y-\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_2-\alpha_1}}\right) \tag{29}$$

得到

$$Y_1=\alpha_2+(\alpha_2-\alpha_1)\tan^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\zeta_0(\alpha_2-\alpha_1)}{\lambda_3}}\right) \tag{30}$$

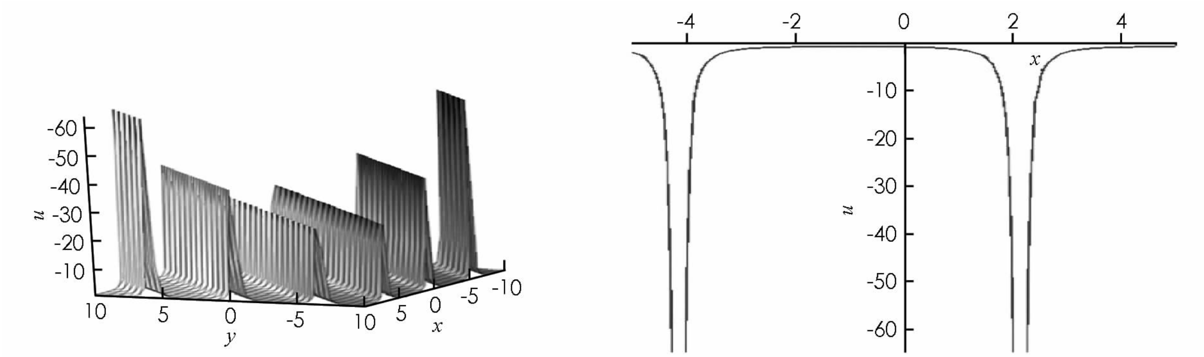
把(28),(30)式代入方程(15)，得到方程(1)的三角函数解 u_2（图 2），

$$u_2=\frac{\lambda_3(2\alpha_1+\alpha_2)\pm\sqrt{48\zeta_0^2C+\lambda_3^2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}{12\zeta_0}-\frac{\lambda_3}{4\zeta_0}\left(\alpha_2+(\alpha_2-\alpha_1)\tan^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\zeta_0(\alpha_2-\alpha_1)}{\lambda_3}}\right)\right) \tag{31}$$

其中

$$k=\frac{-\zeta_0 \pm \sqrt{48{\zeta_0}^2C+\lambda_3^2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}{2\zeta_0}$$

$$\alpha_2>\alpha_1 \qquad \lambda_3\zeta_0>0 \qquad \xi=x+y-kt$$



(a) $t=0,\ \alpha_2=2,\ \lambda_3=\zeta_0=C=\alpha_1=1$时的解　(b) $y=1,\ \alpha_2=2,\ t=0,\ \lambda_3=\zeta_0=C=\alpha_1=1$时的解

图 2　方程(1) 的解 u_2

同样地，当 $\alpha_1>\alpha_2$ 时，

$$Y_2=\alpha_1+(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{csc}h^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\zeta_0(\alpha_1-\alpha_2)}{\lambda_3}}\right) \tag{32}$$

把(28),(32) 式代入方程(15)，得到方程(1) 的双曲函数解 u_3，

$$u_3=\frac{\lambda_3(2\alpha_1+\alpha_2)\pm\sqrt{48\zeta_0^2C+\lambda_3^2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}{12\zeta_0}-\frac{\lambda_3}{4\zeta_0}\left(\alpha_1+(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{csc}h^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\zeta_0(\alpha_1-\alpha_2)}{\lambda_3}}\right)\right) \tag{33}$$

其中

$$k=\frac{-\sigma_0\pm\sqrt{48\zeta_0^2C+\lambda_3^2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}{2\zeta_0}$$

$$\alpha_1>\alpha_2 \qquad \lambda_3\zeta_0>0 \qquad \xi=x+y-kt$$

情况 3　若

$$Y^3+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}Y^2+\frac{\lambda_1}{\lambda_3}Y+\frac{\lambda_0}{\lambda_3}=(Y-\alpha_1)(Y-\alpha_2)(Y-\alpha_3) \tag{34}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非零常数，等式两边系数相等，得到

$$\begin{cases}\lambda_2=-\lambda_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\\ \lambda_1=\lambda_3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_2)\\ \lambda_0=-\lambda_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\end{cases} \tag{35}$$

把(35) 式代入(18) 式，得到

$$\begin{cases}\tau_1=-\dfrac{\lambda_3}{4\zeta_0}\\ \tau_0=\dfrac{\lambda_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\pm\sqrt{48\zeta_0^2C-\lambda_3^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_2)+\lambda_3^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}}{-12\zeta_0}\\ k=\dfrac{-\zeta_0\pm\sqrt{48\zeta_0^2C-\lambda_3^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_2)+\lambda_3^2({\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2)}}{2\zeta_0}\end{cases} \tag{36}$$

其中 $\lambda_3,\zeta_0,C,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为任意常数，

$$Y=\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)sn^2\left[\frac{\sqrt{-\lambda_3\zeta_0(\alpha_1-\alpha_3)}\xi}{2\lambda_3},\ \sqrt{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}}\right] \tag{37}$$

把(36),(37) 式代入方程(15)，得到方程(1) 的椭圆函数解 u_4(图 3)，

$$u_4 = \frac{\lambda_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \pm \sqrt{48\zeta_0^2 C - \lambda_3^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_2) + \lambda_3^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}}{-12\zeta_0} - \frac{\lambda_3}{4\zeta_0}\left[\alpha_1 + (\alpha_2-\alpha_1) sn^2\left[\frac{\sqrt{-\lambda_3\zeta_0(\alpha_1-\alpha_3)}\xi}{2\lambda_3}, \sqrt{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}}\right]\right] \tag{38}$$

其中

$$k = \frac{-\zeta_0 \pm \sqrt{48\zeta_0^2 C - \lambda_3^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_2) + \lambda_3^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}}{2\zeta_0}$$

$$\xi = x + y - kt \qquad \lambda_3\zeta_0 > 0$$

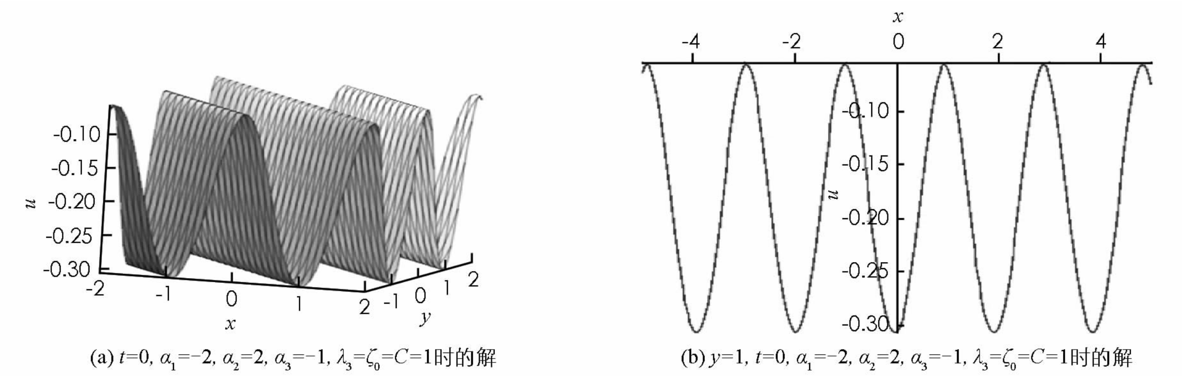


图 3　方程(1)的解 u_4

3　总　　结

利用扩展试验方程法得到了积分微分 KP 层次方程的钟状解、三角函数解、双曲函数解和椭圆函数解的精确表达式．通过查阅文献，这些解的显示表达式是首次求出的，可以看出扩展试验方程法是求解非线性偏微分方程的有效方法，可以用于求解数学物理中的非线性偏微分方程．

参考文献：

[1] 付遵涛，刘式适，刘式达．非线性波方程求解的新方法［J］．物理学报，2004，53(2)：343-348.

[2] KANGALGIL F，AYAZ F．New Exact Travelling Wave Solutions for the Ostrovsky Equation［J］．Physics Letters A，2008，372(11)：1831-1835.

[3] 张金华，丁玉敏．一族非线性色散偏微分方程的指数函数型和三角函数型精确解［J］．西南大学学报(自然科学版)，2012，34(1)：28-33.

[4] WAZWAZ A M．A Class of Nonlinear Fourth Order Variant of a Generalized Camassa-Holm Equation with Compact and Noncompact Solutions［J］．Applied Mathematics and Computation，2005，165(2)：485-501.

[5] 何彩霞，刘小华．耦合 KdV 型方程有界行波解的存在性及其显式表达式［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(7)：26-29.

[6] 许丽萍．利用 G'/G 展开法构造非线性微分差分方程的精确解［J］．西南大学学报(自然科学版)，2010，32(7)：34-40.

[7] 范恩贵，张鸿庆．Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程的 Bäcklund 变换和精确解［J］．应用数学和力学，1998，19(8)：667-670.

[8] BELGACEM F，BULUT H，BASKONUS H M，et al．Mathematical Analysis of the Generalized Benjamin and Burger-Kdv Equations via the Extended Trial Equation Method［J］．Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences，2014，16(1)：91-100.

[9] GEPREEL K A．Extended Trial Equation Method for Nonlinear Coupled Schrodinger Boussinesq Partial Differential Equations［J］．Journal of the Egyptian Mathematical Society，2016，24(3)：381-391.

[10] KHALFALLAH M．New Exact Traveling Wave Solutions of the (3+1)-Dimensional Kadomtsev-Petviashvili(KP) E-

quation [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 1169-1175.

[11] NEIRAMEH A, EBRAHIMI M, MAHMEIANI A G. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Expansion Method for(2+1)-Dimensional Kadomtsev-Petviashvili Equation [J]. Journal of King Saud University-Science, 2011, 23(2): 179-181.

[12] ADEM A R. Symbolic Computation on Exact Solutions of a Coupled Kadomtsev-Petviashvili Equation: Lie Symmetry Analysis and Extended Tanh Method [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2017, 74(8): 1897-1902.

The Exact Traveling Wave Solution of the Integral Differential KP Hierarchy Equation

SONG Jia-qian, LIU Xiao-hua

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: By means of the integral transformation and traveling wave transformation, the KP hierarchical equation can be turned into the equivalent ordinary differential equation. With the help of the extended trial equation method, the problem of solving ordinary differential equation is transformed into that of solving algebraic equation system. According to the solutions of algebraic equation system and the extended trial equation, we have obtained the exact expressions of bell-shaped solution, triangular solution, hyperbolic solution and elliptic function solution of the KP hierarchical equation. The explicit expressions of these solutions are obtained for the first time. With the extended trial equation method, many new exact solutions of nonlinear partial differential equations can be obtained effectively.

Key words: extend trial equation method; KP hierarchical equation; travelling wave solution

责任编辑 廖 坤