DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.10.006

带有临界指数的 Kirchhoff 方程最小能量变号解的存在性[①]

彭秋颖，　吕　颖

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了一类带临界指数的 Kirchhoff 方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=h(x)|u|^{p-2}u+u^5 \qquad x\in\mathbb{R}^3$$

其中 $a,b>0$，$p\in(4,6)$. 利用 Nehari 流形和变分法获得了该方程的最小能量变号解.

关　键　词： Kirchhoff 方程；临界指数；Nehari 流形；变分法

中图分类号： O176.3　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2019)10-0023-07

考虑如下带临界指数的 Kirchhoff 方程：

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=h(x)|u|^{p-2}u+u^5 \qquad x\in\mathbb{R}^3 \tag{1}$$

其中 $a,b>0$，$p\in(4,6)$. 定义

$$V^-(x)=\max\{-V(x),0\}$$

假设 $V(x)$,$h(x)$ 满足下列条件：

(V_0) $V^-\in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$，$\int_{\mathbb{R}^3}|V^-(x)|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x<S^{\frac{3}{2}}$，其中

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}$$

(V_1) 存在 $r>0$，$C_v>0$，使得

$$V(x)\leqslant V_\infty-C_v\mathrm{e}^{-r|x|} \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^3 \qquad V_\infty=\lim_{|x|\to+\infty}V(x)>0$$

(h_0) $h\in L^{\frac{6}{6-p}}(\mathbb{R}^3)$；

(h_1) 存在 $\theta>0$，$C_h>0$，使得

$$h(x)\geqslant h_\infty-C_he^{-\theta|x|} \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^3 \qquad h_\infty=\lim_{|x|\to+\infty}h(x)>0$$

近年来，许多学者研究了带临界指数的 Kirchhoff 方程(参考文献[1-7]). 特别地，文献[8]利用山路引理和反证法得到了带临界指数的 Kirchhoff 方程的变号解. 带临界指数的 Kirchhoff 方程往往存在紧性的缺失，

① 收稿日期：2019-03-06
基金项目：国家自然科学基金项目(11601438).
作者简介：彭秋颖(1995-)，女，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：吕　颖，教授.

本文将通过比较方程(1)和其极限方程在Nehari流形子集上的极小值大小，克服该问题.

由文献[9]的命题2.4，我们可以得到方程(1)的极限问题有一个正解 w. 令

$$\alpha=\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

本文的主要结果为：

定理1 假设条件(V_0),(V_1),(h_0),(h_1)成立，若 $r<\theta<\frac{p\sqrt{V_\infty}}{\alpha}$，则方程(1)有一个正的基态解.

定理2 假设条件(V_0),(V_1),(h_0),(h_1)成立，若 $r<\min\left\{\frac{\sqrt{V_\infty}}{\alpha},\theta\right\}$，$\theta<\frac{p\sqrt{V_\infty}}{\alpha}$，则方程(1)有一个最小能量变号解.

1 预备知识

方程(1)对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\qquad u\in X$$

其中

$$X=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}a|\nabla u|^2+V(x)|u|^2\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

范数为

$$\|u\|^2=\int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x$$

因为 X 连续嵌入到Hilbert空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，所以 X 连续嵌入到空间 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中，其中 $q\in(2,2^*)$.

因为泛函 $I(u)\in C^1(X,\mathbb{R})$，所以方程(1)的解是能量泛函 $I(u)$ 的临界点. 即 u 是方程(1)的弱解是指：对 $\forall v\in X$，有

$$\langle I(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(a\nabla u\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u|^{p-1}v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|u|^5v\mathrm{d}x$$

考虑方程(1)的极限问题

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V_\infty u=h_\infty|u|^{p-2}u+u^5\tag{2}$$

对应的能量泛函为

$$I_\infty(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla u|^2+V_\infty u^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}h_\infty|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\qquad u\in X$$

定义Nehari流形

$$\mathcal{N}=\{u\in X\backslash\{0\}:\langle I'(u),u\rangle=0\}$$
$$\mathcal{N}_\infty=\{u\in X\backslash\{0\}:\langle I'_\infty(u),u\rangle=0\}$$
$$\mathcal{N}^\pm=\{u\in X\backslash 0\}:\langle I'(u),u^+\rangle=0,\langle I'(u),u^-\rangle=0\}$$
$$\mathcal{N}_R^\pm=\mathcal{N}^\pm\cap H^1(B_R(0))\qquad R>0$$

本文的思路是：先讨论方程(1)的正解 $\bar{u}$ 和极限方程(2)的正解 w 的性质；再证明 $m_R^\pm=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}_R^\pm}I(u)$ 在流形 $\mathcal{N}_R^\pm$ 上可达到；由形变引理可得，对 $\forall\varphi\in H^1(B_R(0))$，有 $\langle I'(u_R),\varphi\rangle=0$；当 $R\to\infty$ 时，$m_R^\pm=m^\pm=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^\pm}I(u)$，且 $\langle I'(u),\varphi\rangle=0$；最后由 $m^\pm<m+m_\infty$ 证得 $u^\pm\neq0$.

2 主要结果的证明

引理1 极限方程(2)有一个正的基态解 $w\in H^1(\mathbb{R}^3)$，使得

$$I_\infty(w) = m_\infty = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u)$$

令

$$\alpha = \left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

对 $\forall \delta \in (0, \sqrt{V_\infty})$，存在 $C = C(\delta) > 0$，使得对 $\forall x \in \mathbb{R}^3$，有 $w(x) \leqslant C\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{\alpha}|x|}$.

证　正解 $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 存在性的证明类似于文献[9]的命题 2.4. 对 $\forall x \in \mathbb{R}^3$，令 $v(x) = w(\alpha x)$，则

$$-\Delta v(x) = \alpha^2 \cdot -\Delta w(\alpha x) = \alpha^2 \frac{h_\infty |w(\alpha x)|^{p-2} w(\alpha x) + |w(\alpha x)|^5 - V_\infty w(\alpha x)}{a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2 \mathrm{d}x}$$

则

$$-\Delta v + V_\infty v = h_\infty |v|^{p-2} v + |v|^5$$

由文献[10]可得 $v(x) \leqslant M \cdot e^{-\delta(|x|-R)}$，所以 $w(x) \leqslant Ce^{-\frac{\delta}{\alpha}|x|}$.

定理 1 的证明　类似于文献[2]和文献[11]的命题 6.1，由 Ekeland 变分原理得到 PS 序列 $\{u_n\} \in \mathcal{N}$. 因为

$$I(u_n) = I(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \| u_n \|^2 > 0$$

所以 $\{u_n\}$ 有界. 又因 $u_n \rightharpoonup u$ 于 X，则 $I'(u) = 0$. 由于对 $\forall x \in \mathbb{R}^3$，有 $w(x) \leqslant Ce^{-\frac{\delta}{\alpha}|x|}$，得 $m < m_\infty$，由此得 $u \neq 0$. 最后由 Fatou 引理证得临界点 u 满足 $I(u) = m$，根据极大值原理可得 u 是正解.

注 1　若 $\bar{u}$ 是方程(1)的正解，且满足 $I(\bar{u}) = m = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u)$，则类似于引理 1，对任何 $\mu > 0$，存在 $C = C(\mu) > 0$，使得对 $\forall x \in \mathbb{R}^3$，有 $\bar{u}(x) \leqslant C\mathrm{e}^{-\mu|x|}$.

引理 2　取 $u \in \mathcal{N}_R^{\pm}$，令 $h^u(t, s) = I(tu^+ + su^-)$，对 $\forall t, s \geqslant 0$，h^u 在点 $(1, 1)$ 处取得极大值.

证　因为 $u \in \mathcal{N}_R^{\pm}$，所以 $\langle I'(u), u^{\pm}\rangle = 0$，则

$$\| u_n^{\pm} \|^2 + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^{\pm}|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} h(x) |u^{\pm}|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} |u^{\pm}|^6 \mathrm{d}x > 0$$

又因

$$\begin{aligned} I(tu^+ + su^-) = & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} [a |\nabla(tu^+) + \nabla(su^-)|^2 + V(x) |tu^+ + su^-|^2] \mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(tu^+) + \nabla(su^-)|^2 \mathrm{d}x\right]^2 - \\ & \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} h(x) |tu^+ + su^-|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |tu^+ + su^-|^6 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{|(t, s)| \to +\infty} h^u(t, s) = -\infty$，则 h^u 的极大值点在 $(t_0, s_0) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 处取得.

第 1 步　证明 $s_0, t_0 > 0$. 假设 $s_0 = 0$，因为 $h^u(0, 0) = 0$ 且 h^u 的极大值点为 (t_0, s_0)，则 $t_0 > 0$. 当 $s > 0$ 足够小时，$I(su^-) > 0$，于是

$$h^u(t_0, 0) = I(t_0 u^+) < I(t_0 u^+) + I(su^-) + \frac{b}{2} s^2 t_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 \mathrm{d}x = h^u(t_0, s)$$

与 $h^u(t_0, s)$ 在 $s = 0$ 处取得极大值矛盾，因此 $s_0 > 0$，同理 $t_0 > 0$.

第 2 步　证明 $s_0, t_0 \in (0, 1]$. 由 $h^u(t, s)$ 的极大值点是 (t_0, s_0) 知，$I(tu^+ + su^-)$ 在 (t_0, s_0) 处的偏导数为 0，即

$$t_0^2 \| u^+ \|^2 + bt_0^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + bs_0^2 t_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 \mathrm{d}x = t_0^p \int_{\mathbb{R}^3} h(x) |u^+|^p \mathrm{d}x + t_0^6 \int_{\mathbb{R}^3} |u^+|^6 \mathrm{d}x$$

假设 $s_0 \leqslant t_0$，因 $\langle I'(u), u^+\rangle = 0$，则

$$t_0^{-2} \| u^+ \|^2 + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 \mathrm{d}x \geqslant t_0^{p-4} \int_{\mathbb{R}^3} h(x) |u^+|^p \mathrm{d}x + t_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |u^+|^6 \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\|u^+\|^2+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u^+|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u^+|^6\mathrm{d}x>\|u^+\|^2 \tag{4}$$

由(3),(4)式得

$$(t_0^2-1)\|u^+\|^2\geqslant(t_0^{p-4}-1)\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u^+|^p\mathrm{d}x+(t_0^2-1)\int_{\mathbb{R}^3}|u^+|^6\mathrm{d}x$$

所以 $t_0\leqslant 1$. 假设 $t_0\leqslant s_0$,由 $\langle I'(tu^++su^-),su^-\rangle=0$ 得 $s_0\leqslant 1$.

第3步 证明 h^u 在 $(0,1]^2\backslash(1,1)$ 处取不到极大值.

$$h^u(t_0,s_0)=I(t_0u^++s_0u^-)-\frac{1}{p}\langle I'(t_0u^++s_0u^-),t_0u^++s_0u^-\rangle=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)(t_0^2\|u^+\|^2+s_0^2\|u^-\|^2)+$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)b\left[\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(t_0u^++s_0u^-)|^2\mathrm{d}x\right]^2+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{6}\right)\int_{\mathbb{R}^3}|t_0u^++s_0u^-|^6\mathrm{d}x$$

若 $t_0<1$ 或 $s_0<1$,则

$$h^u(t_0,s_0)<I(u^++u^-)-\frac{1}{p}\langle I'(u^++u^-),u^++u^-\rangle=h^u(1,1)$$

引理3 对 $\forall R>0$,令 $m_R^{\pm}=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}_R^{\pm}}I(u)$,存在 $u_R\in\mathcal{N}_R^{\pm}$,使得 $I(u_R)=m_R^{\pm}$.

证 令 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_R^{\pm}$,则 $I(u_n)\to m_R^{\pm}$,$\langle I'(u_n),u_n\rangle=0$. 由

$$m_R^{\pm}=I(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2$$

知 $\{u_n\}$ 有界,则存在 $u\in H_0^1(B_R(0))$,使得 $u_n\rightharpoonup u$ 于 $H_0^1(B_R(0))$,$u_n\to u$ 于 $L^p(B_R(0))$,$u_n(x)\to u(x)$ 对 a.e. $x\in(B_R(0))$ 一致成立.

因为 $\langle I'(u_n),u_n^{\pm}\rangle=0$,所以

$$\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u_n^{\pm}|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^{\pm}|^6\mathrm{d}x=|u_n^{\pm}\|^2+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^{\pm}|\mathrm{d}x\geqslant|u_n^{\pm}\|^2$$

又因 $\{u_n\}$ 有界,则存在 $\rho>0$,使得

$$|u_n^{\pm}\|^2+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^{\pm}|\mathrm{d}x\geqslant|u_n^{\pm}\|^2\geqslant\rho^2$$

由引理2的证明知,h^u 在 $(t_u,s_u)\in\mathbb{R}^2$ 处取得极大值,其中 $t_u,s_u>0$. 因此

$$\frac{\partial}{\partial t_u}h^u(t_u,s_u)=0=\frac{\partial}{\partial s_u}h^u(t_u,s_u)$$

即 $u_R=(t_uu^+,s_uu^-)\in\mathcal{N}_R^{\pm}$. 因 $u_n^{\pm}\rightharpoonup u^{\pm}$,由引理2得

$$m_R^{\pm}\leqslant I(t_uu^++s_uu^-)\leqslant\liminf_{n\to\infty}I(t_uu_n^++s_uu_n^-)=\liminf_{n\to\infty}h^{u_n}(t_{u_n},s_{u_n})\leqslant$$

$$\liminf_{n\to\infty}h^{u_n}(1,1)=\liminf_{n\to\infty}I(u_n)=m_R^{\pm}$$

引理4 对任何 $R>0$,存在 $u_R\in\mathcal{N}_R^{\pm}$ 使得 $I(u_R)=m_R^{\pm}$,且 $\langle I'(u_R),\varphi\rangle=0$,$\forall\varphi\in H_0^1(B_R(0))$.

证 由文献[9]的形变引理反证可得.

引理5 $m^{\pm}=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^{\pm}}I(u)$,$\lim\limits_{R\to\infty}m_R^{\pm}=m^{\pm}$.

证 证明较简单,类似于文献[12]的引理4.1.

引理6 $m^{\pm}<m+m_{\infty}$.

证 由引理1和注1知 $I(\bar{u})=m$,$I(w)=m_{\infty}$. 令

$$x_n=(0,0,n)\in\mathbb{R}^3$$

$$w_n(x)=w(x+x_n)\qquad\forall x\in\mathbb{R}^3$$

对 $\forall n\in\mathbb{N}$,$(t,s)\in\left[\frac{1}{2},2\right]^2$,定义 $\psi_n(x)=t\bar{u}(x)-sw_n(x)$,其中 $x\in\mathbb{R}^3$. 证存在 $n_0\in\mathbb{N}$,当 $n\geqslant n_0$,

$(s, t) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]^2$ 时，有 $I(\psi_n) < m + m_\infty$. 因为

$$I(t\bar{u} - sw_n) = I(t\bar{u}) + I^\infty(sw_n) + A_n + B_n + C_n + D_n + E_n + F_n$$

其中

$$A_n = \frac{1}{2}s^2\int_{\mathbb{R}^3}(V(x) - V_\infty)w_n^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}s^2\int_{\mathbb{R}^3}(-C_v\mathrm{e}^{-r|x|})\mathrm{e}^{-2\frac{\delta}{\alpha}|x+x_n|}\mathrm{d}x \leqslant -C_1\mathrm{e}^{-rn}$$

$$D_n = \frac{S^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(h_\infty - h(x))w_n^p\mathrm{d}x \leqslant \frac{S^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(C_h\mathrm{e}^{-\theta|x|})\mathrm{e}^{-p\frac{\delta}{\alpha}|x+x_n|}\mathrm{d}x \leqslant C_2\mathrm{e}^{-\theta n}$$

由注 1，有 $\bar{u}(x) \leqslant Ce^{-\mu|x|}$，取 $\gamma < \mu < \frac{\sqrt{V_\infty}}{\alpha}$，则

$$B_n = -st\int_{\mathbb{R}^3}[a(\nabla\bar{u}\cdot\nabla w_n) + V(x)(\bar{u}\cdot w_n)]\mathrm{d}x \leqslant -C_3\mathrm{e}^{-\mu n}$$

$$E_n = -\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}h(x)(|\psi_n|^p - |t\bar{u}|^p - |sw_n|^p)\mathrm{d}x \leqslant -C\int_{\mathbb{R}^3}(|t\bar{u}|^{p-1}sw_n + |sw_n|^{p-1}t\bar{u})\mathrm{d}x \leqslant -C_4\mathrm{e}^{-\mu n}$$

$$F_n = -\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(|\psi_n|^6 - |t\bar{u}|^6 - |sw_n|^6)\mathrm{d}x \leqslant -C\int_{\mathbb{R}^3}(|t\bar{u}|^5 sw_n + |sw_n|^5 t\bar{u})\mathrm{d}x \leqslant -C_5\mathrm{e}^{-\mu n}$$

因 $\langle I'_\infty(w_n), w_n\rangle = 0$，令 $\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x = G_n > 0$，有

$$aG_n + bG_n^2 = \int_{\mathbb{R}^3}h_\infty|w_n|^p\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}|w_n|^6\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}V_\infty|w_n|^2\mathrm{d}x < C\mathrm{e}^{-\delta n}$$

则

$$G_n \leqslant \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4C\mathrm{e}^{-\delta n}}}{2b} \to 0 \qquad n \to \infty$$

所以

$$\begin{aligned} C_n = &\frac{b}{4}\Big[4t^2s^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{u}|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x + 2t^2s^2\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\bar{u}\cdot\nabla w_n\mathrm{d}x\right)^2 - \\ &-4t^3s\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{u}|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\bar{u}\cdot\nabla w_n\mathrm{d}x - 4ts^3\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\bar{u}\cdot\nabla w_n\mathrm{d}x\Big] \leqslant \\ &C_6\mathrm{e}^{-\mu n} + C_7G_n \end{aligned}$$

则

$$I(\psi_n) \leqslant m + m_\infty - C_1\mathrm{e}^{-rn} + C_2\mathrm{e}^{-\theta n} - C_3\mathrm{e}^{-\mu n} + - C_4\mathrm{e}^{-\mu n} - C_5\mathrm{e}^{-\mu n} + C_6\mathrm{e}^{-\mu n} + C_7G_n$$

当 $n \to \infty$ 时，$m^\pm \leqslant m + m_\infty + o(1)$.

下证当 $(t_0, s_0) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]^2$ 时，$t_0\bar{u} - s_0w_n \in \mathcal{N}^\pm$. 令

$$h^\pm(t, s, n) = \langle I'(t\bar{u} - sw_n), (t\bar{u} - sw_n)^\pm\rangle$$

由 $\langle I'(\bar{u}), \bar{u}\rangle = 0$，得

$$h^+\left(\frac{1}{2}, 0, n\right) > 0 \qquad h^+(2, 0, n) < 0$$

由 $\langle I'_\infty(w_n), w_n\rangle = 0$，得

$$h^-\left(0, \frac{1}{2}, n\right) > 0 \qquad h^-(0, 2, n) < 0$$

由 Miranda 定理知，当 n 足够大时，存在 $(t_0, s_0) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]^2$，使得 $h^\pm(t_0, s_0, n) = 0$，即 $t_0\bar{u} - s_0w_n \in \mathcal{N}^\pm$.

定理 2 的证明　令引理 3 中 $R = n$，则 $u_n \in \mathcal{N}^\pm$. 因 $\mathcal{N}^\pm \subset \mathcal{N}$，所以 $\{u_n\}$ 有界. 存在 $u \in X$，使得 $u_n \rightharpoonup u$ 于 X. 由引理 4 知 u 是临界点，下证 $u^\pm \neq 0$. 令 $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$，定义

$$K_1 = \lim_{n\to\infty} I(u_n^+) + \frac{b}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x$$

$$K_2=\lim_{n\to\infty} I(u_n^-)+\frac{b}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x$$

因为 $I(u_n)=m_n^{\pm}$，所以由引理 5、引理 6 得

$$K_1+K_2=\lim_{n\to\infty} I(u_n)=m^{\pm}<m+m_{\infty}$$

现证 $u^+\neq 0$. 假设 $u^+=0$，则 $u_n^+\rightharpoonup 0$ 于 X. 令

$$\|u_n^+\|_*^2=\int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla u_n^+|^2+V_{\infty}|u_n^+|^2)\mathrm{d}x$$

可得 $\|u_n^+\|_*^2=\|u_n^+\|^2+o_n(1)$. 存在 $t_n>0$，使得 $t_nu_n^+\in\mathcal{N}_{\infty}$，即

$$t_n^2\|u_n^+\|_*^2+bt_n^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\right)^2=t_n^p\int_{\mathbb{R}^3}h_{\infty}|u_n^+|^p\mathrm{d}x+t_n^6\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^+|^6\mathrm{d}x \tag{5}$$

因 $\langle I'(u_n),u_n^+\rangle=0$，则

$$\|u_n^+\|^2+b^4\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u_n^+|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^+|^6\mathrm{d}x \tag{6}$$

由条件(h_0)知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得 $\int_{|x|>R}|h(x)|^{\frac{6}{6-p}}\mathrm{d}x<\varepsilon$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u_n^+|^p\mathrm{d}x=&\int_{|x|\leqslant R}h(x)|u_n^+|^p\mathrm{d}x+\int_{|x|>R}h(x)|u_n^+|^p\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{|x|\leqslant R}h(x)|u_n^+|^p\mathrm{d}x+\left(\int_{|x|>R}|h(x)|^{\frac{6}{6-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{6-p}{6}}\left(\int_{|x|>R}|u_n^+|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{6}}<\\&o(1)+\varepsilon\cdot\left(\int_{|x|>R}|u_n^+|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{6}}\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u_n^+|^p\mathrm{d}x\to 0$，根据条件($\mathrm{h}_1$)可知 $\int_{\mathbb{R}^3}h_{\infty}|u_n^+|^p\mathrm{d}x\to 0$. 由(5),(6)式可得

$$\left(1-\frac{1}{t_n^2}\right)\|u_n^+\|^2+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x=(1-t_n^2)\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^+|^6\mathrm{d}x \tag{7}$$

若 $\limsup\limits_{n\to\infty} t_n>1$，则(7)式左边大于 0，(7)右边小于 0，矛盾，则不成立.

若 $\limsup\limits_{n\to\infty} t_n\leqslant 1$，

$$\begin{aligned}m_{\infty}\leqslant I_{\infty}(t_nu_n^+)=&I_{\infty}(t_nu_n^+)-\frac{1}{4}\langle I'_{\infty}(t_nu_n^+),t_nu_n^+\rangle=\\&\frac{t_n^2}{4}\|u_n^+\|_*^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)t_n^p\int_{\mathbb{R}^3}h_{\infty}|u_n^+|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{12}t_n^6\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^+|^6\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{4}\|u_n^+\|_*^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}h_{\infty}|u_n^+|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^+|^6\mathrm{d}x=\\&I_{\infty}(u_n^+)-\frac{1}{4}\langle I'_{\infty}(u_n^+),u_n^+\rangle=\\&I_{\infty}(u_n^+)+\frac{b}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x=K_1\end{aligned} \tag{8}$$

则可得 $m_{\infty}\leqslant K_1$，又因 $K_1+K_2<m+m_{\infty}$，则 $K_2<m$.

存在 $s_n>0$，使得 $s_nu_n^-\in\mathcal{N}$，即 $\langle I'(s_nu_n^-),s_nu_n^-\rangle=0$. 由

$$0=\langle I'(u_n),u_n^-\rangle=\langle I'(u_n^-),u_n^-\rangle+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x$$

得 $\langle I'(u_n^-),u_n^-\rangle<0$. 因此 $s_n\leqslant 1$，类似于(8)式可得 $K_2\geqslant m$，得到矛盾，假设不成立，即 $u^+\neq 0$. 同理 $u^-\neq 0$.

我们已经证得 u 是方程(1)的变号解，下证 u 是最小能量变号解.

$$\begin{aligned}m^{\pm}\leqslant I(u)=&I(u)-\frac{1}{4}\langle I'(u),u\rangle=\\&\frac{1}{4}\|u\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}h(x)|u|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\leqslant\end{aligned}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left[I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),\ u_n\rangle\right]=m^{\pm}$$

$I(u)=m^{\pm}$，因此定理 2 证毕.

参考文献：

[1] FAN H N. Multiple Positive Solutions for a Class of Kirchhoff Type Problems Involving Critical Sobolev Exponents [J]. J Math Anal Appl, 2015, 431(1): 150-168.

[2] LEI C Y, SUO H M, CHU C M, et al. On Ground State Solutions for a Kirchhoff Type Equation with Critical Growth [J]. Comput Math Appl, 2016, 72(3): 729-740.

[3] LI G B, YE H G. Existence of Positive Solutions for Nonlinear Kirchhoff Type Problems in $\mathbb{R}^3$ with Critical Sobolev Exponent [J]. Math Methods Appl Sci, 2014, 37(16): 2570-2584.

[4] LIU J, LIU T, PAN H L. A Result on a Non-Autonomous Kirchhoff Type Equation Involving Critical Term [J]. Appl Math Lett, 2018, 85: 82-87.

[5] 刘选状，吴行平，唐春雷. 一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 54-59.

[6] 任正娟，商彦英. 带有临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(4): 78-84.

[7] 曾　兰，唐春雷. 带有临界指数的 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 29-34.

[8] XU L P, CHEN H B. Sign-Changing Solution to Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations with Critical Exponent [J]. Adv Differ Equ, 2016, 2016: 121.

[9] HE X M, ZHOU W M. Existence and Concentration Behavior of Positive Solutions for a Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^3$ [J]. J Differ Equ, 2012, 252(2): 1813-1834.

[10] BERESTYCKI H, LIONS P L. Nonlinear Scalar Field Equations. I. Existence of a Ground State [J]. Arch Rational Mech Anal, 1983, 82(4): 313-345.

[11] WANG L, ZHANG B L, CHENG K. Ground State Sign-Changing Solutions for the Schrödinger-Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^3$ [J]. J Math Anal Appl, 2018, 466(2): 1545-1569.

[12] BATISTA A M, FURTADO M F. Positive and Nodal Solution for a Nonlinear Schrödinger-Poisson System with Sign-Changing Potentials [J]. Nonlinear Anal, 2018, 39: 142-156.

Existence of a Sign-Changing Solution with Minimal Energy for a Kirchhoff Equation with Critical Exponents

PENG Qiu-ying,　LÜ　Ying

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the following Kirchhoff equation has been considered with critical exponents

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=h(x)|u|^{p-2}u+u^5\qquad x\in\mathbb{R}^3$$

where $a,b>0$, $p\in(4,6)$. By means of Nehari manifold and variational method, the sign-changing solution with minimal energy is obtained.

Key words: Kirchhoff equation; critical exponent; Nehari manifold; variational method

责任编辑　廖　坤