DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.10.007

关于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中凸体的曲率积分不等式[①]

张增乐

重庆文理学院 数学与大数据学院,重庆 永川 402160

摘要: 建立关于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中 C^2 边界光滑凸体的曲率积分不等式,这些新的曲率积分不等式将包含欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上一些已知的著名的曲率积分不等式.

关 键 词: 光滑凸体;Gauss 曲率;曲率积分不等式

中图分类号:O186.5　**文献标志码:A**　**文章编号:** 1000-5471(2019)10-0030-04

几何不等式描述了几何不变量(体积、面积、Gauss 曲率、平均曲率等)间的关系[1-12]. 这些几何不等式可分为内蕴(体积、面积、长度、Gauss 曲率等)与外蕴(法曲率、平均曲率等)几何不等式. 经典的等周不等式与 Minkowski 不等式是内蕴几何不等式,关于外蕴几何不等式,我们知之甚少. 以下著名的 Ros 不等式是关于外蕴几何不变量与内蕴几何不变量的不等式(参见文献[11-12]):

Ros 不等式:设 Σ 为嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致闭 C^2 曲面,其包含的体积为 V. 若 Σ 的平均曲率 $H>0$,则

$$\int_{\Sigma}\frac{1}{H}\mathrm{d}A\geqslant 3V \tag{1}$$

其中 A 为 Σ 的面积,等号成立当且仅当 Σ 为球面.

对于平面上的光滑闭曲线,有以下平面上的 Ros 不等式:设 γ 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上的简单光滑闭曲线,其周长与面积分别为 L 与 A. 若曲线 γ 的曲率 $\kappa>0$,则

$$\int_{\gamma}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s\geqslant 2A \tag{2}$$

其中 s 为弧长参数,等号成立当且仅当 γ 为圆.

文献[10]加强了不等式(2),得到以下结果:

$$\int_{\gamma}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s\geqslant\frac{L^2}{2\pi} \tag{3}$$

等号成立当且仅当 γ 为圆. 由平面上的等周不等式知(3)式强于(2)式.

文献[10]中有猜想:设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中 C^2 边界光滑的凸体,设 $S(K)$ 与 $V(K)$ 分别为 K 的表面积与体积,是否存在一个与其边界 ∂K 主曲率相关的曲率函数 $f(\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1})$,使得

$$\int_{x\in\partial K}f(\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1})\mathrm{d}S(x)\geqslant\left(\frac{S(K)^n}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{4}$$

其中 $S(\cdot)$ 是边界 ∂K 的面积元,ω_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球的体积,且不等式成立当且仅当 K 为球. 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 的情形下,(4)式中的曲率函数变为 $f(\kappa)=\dfrac{1}{\kappa}$.

本文将给出一类 $\mathbb{R}^n$ 中 C^2 边界光滑凸体的 Gauss 曲率的积分不等式(参见定理 1). 特别地,当定理 1 中的次幂取 $t=-\dfrac{1}{n-1}$ 时,有

---

① 收稿日期:2019-02-22

基金项目:国家自然科学基金项目(11671325).

作者简介:张增乐(1988-),男,博士,讲师,主要从事积分几何与凸几何分析的研究.

$$\int_{x\in\partial K} H_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}} \mathrm{d}S(x) \geqslant \left(\frac{S(K)^n}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

其中 H_{n-1} 为 K 边界的 Gauss 曲率．对于平面上的凸体，$H_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}}$ 变为$\frac{1}{\kappa}$，这说明不等式(4) 中的曲率函数取 $H_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}}$ 时，(4) 式成立．此外，当曲率函数取 $f(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}) = \frac{H_{n-2}}{H_{n-1}}$ 时，(4) 式仍成立(参见定理 2)，其中 H_{n-2} 为$(n-2)$ 阶平均曲率．最后，我们将给出定理 2 的推广形式(参见定理 3)．

1　预备知识

设 K 为欧氏空间中的点集，若对于任意两点 $x, y \in K$，有

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in K \qquad 0 < \lambda < 1$$

则称 K 为凸集．$\mathbb{R}^n$ 中的非空紧凸集 K 称为凸体．凸体的边界 ∂K 称为凸超曲面．凸体 K 的支撑函数定义为

$$h_K(u) = \max\{u \cdot x : x \in K\} \qquad u \in S^{n-1}$$

其中 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面．

设 S 为欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的超曲面，p 为 S 上的任意一点，$\boldsymbol{N}$ 为 S 在 p 点处的单位法向量．设 $x(s)$ 为 S 上过 p 点的一条曲线，并且 $x(0) = p$，其中 s 为曲线 $x(s)$ 的弧长参数．对于曲线 $x(s)$，其曲率向量在 $\boldsymbol{N}$ 方向的分量仅依赖于单位切向量 $\boldsymbol{T} = x'(0)$．当曲线 $x(s)$ 变化时，我们得到一系列值 $x''(s) \cdot \boldsymbol{N} = \kappa(\boldsymbol{T})$，称之为超曲面 S 在 p 点处沿 $\boldsymbol{T}$ 方向的法曲率．$\kappa(\boldsymbol{T})$ 是切空间的一个二次形式 Q 在单位球上的限制．存在单位正交基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ 对角化 Q．方向 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ 称为超曲面 S 在 p 点处的主曲率方向．与之所对应的值 $\kappa_1 = \kappa(\boldsymbol{e}_1), \cdots, \kappa_{n-1} = \kappa(\boldsymbol{e}_{n-1})$ 称为超曲面 Σ 在 p 点处的主曲率．

考虑高斯映射 $g: p \longrightarrow \boldsymbol{N}_p$，微分得 $\mathrm{d}g_p: x'(t) \longrightarrow \boldsymbol{N}'(t)$，又满足 Rodrigues 方程

$$\mathrm{d}g_p(\boldsymbol{e}_i) = -\kappa_i \boldsymbol{e}_i \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

我们得到关于主曲率的对称函数，称之为高阶中曲率．我们用 H_k 表示第 k 阶平均曲率，

$$H_k = \binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1} \kappa_{i_1}\cdots\kappa_{i_k} \qquad k = 1, \cdots, n-1$$

此时 $H_0 = 1$．当 $k = 1$ 时，H_1 为超曲面 S 的平均曲率；当 $k = n-1$ 时，H_{n-1} 为超曲面 S 的 Gauss-Kronecker 曲率．即我们得到平均曲率

$$H_1 = \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \cdots + \kappa_{n-1}) = -\frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\,(\mathrm{d}g_p)$$

以及 Gauss-Kronecker 曲率

$$H_{n-1} = \kappa_1\cdots\kappa_{n-1} = (-1)^{n-1}\det(\mathrm{d}g_p)$$

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^2 边界光滑的凸体，则

$$H_{n-1}\mathrm{d}S(x) = \mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$ 为边界 ∂K 上 x 处的单位外法向量，$\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 表示 S^{n-1} 上的面积元．

令 $r_i = \frac{1}{\kappa_i}$，$i = 1, \cdots, n-1$，则 r_i 称为主曲率半径．称

$$F_k = \binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1} r_{i_1}\cdots r_{i_k} \qquad k = 1, \cdots, n-1$$

为 K 的 k 阶曲率函数．函数 H_k 与 F_k 有如下关系

$$F_k = \frac{H_{n-1-k}}{H_{n-1}} \qquad H_k = \frac{F_{n-1-k}}{F_{n-1}} \tag{6}$$

2　$\mathbb{R}^n$ 中的曲率积分不等式

定理 1　设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^2 边界光滑的凸体，则

$$\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u) \geqslant (n\omega_n)^t S(K)^{1-t} \qquad t \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \tag{7}$$

$$\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u) \leqslant (n\omega_n)^t S(K)^{1-t} \qquad t \in [0, 1] \tag{8}$$

当 $t = 0,1$ 时，等式成立；当 $t \neq 0,1$ 时，等号成立当且仅当 K 为球.

证 当 $t > 0$ 且 $t \neq 1$ 时. 由(5)式与 Hölder 不等式，我们有

$$(n\omega_n)^{\frac{-t}{1-t}} \left(\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u)\right)^{\frac{1}{1-t}} =$$

$$\left(\int_{S^{n-1}} g_K(u) \mathrm{d}S(K, u)\right)^{\frac{-t}{1-t}} \left(\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u)\right)^{\frac{1}{1-t}} \leqslant$$

$$\int_{S^{n-1}} g_K(u)^{\frac{-t}{1-t}} \cdot g_K(u)^{\frac{t}{1-t}} \mathrm{d}S(K, u) = S(K)$$

由 Hölder 不等式等号成立的条件，等式成立当且仅当 g_K 为常数，即 K 为球. 故当 $t \in (0, 1)$ 时，有

$$\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u) \leqslant (n\omega_n)^t S(K)^{1-t}$$

当 $t \in (1, +\infty)$ 时，有

$$\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u) \geqslant (n\omega_n)^t S(K)^{1-t}$$

当 $t \in (-\infty, 0)$ 时，由逆向的 Hölder 不等式，我们有

$$(n\omega_n)^{\frac{-t}{1-t}} \left(\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u)\right)^{\frac{1}{1-t}} =$$

$$\left(\int_{S^{n-1}} g_K(u) \mathrm{d}S(K, u)\right)^{\frac{-t}{1-t}} \left(\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u)\right)^{\frac{1}{1-t}} \geqslant$$

$$\int_{S^{n-1}} g_K(u)^{\frac{-t}{1-t}} \cdot g_K(u)^{\frac{t}{1-t}} \mathrm{d}S(K, u) = S(K)$$

即当 $t \in (-\infty, 0)$ 时，有

$$\int_{S^{n-1}} g_K(u)^t \mathrm{d}S(K, u) \geqslant (n\omega_n)^t S(K)^{1-t}$$

其中等号成立当且仅当 K 为球.

在定理1中，若 $t = -\frac{1}{n-1}$，我们得

$$\int_S H_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}} \mathrm{d}S(x) \geqslant \left(\frac{S(K)^n}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{9}$$

这说明若曲率函数 $f(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}) = H_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}$ 时，不等式(4)成立. 定理1给出了一类内蕴几何不等式，下面我们将给出关于内蕴几何量与外蕴几何量的不等式.

定理2 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^2 边界光滑的凸体，则

$$\int_{x \in \partial K} \frac{H_{n-2}}{H_{n-1}} \mathrm{d}S(x) \geqslant \left(\frac{S(K)^n}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{10}$$

等号成立当且仅当 K 为球.

证 由 H_{n-2} 与 H_{n-1} 的定义及代数-几何均值不等式，有

$$H_{n-2}^{\frac{1}{n-2}} \geqslant H_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$$

等号成立当且仅当 $\frac{1}{\kappa_1} = \cdots = \frac{1}{\kappa_{n-1}}$，即 K 为球. 再由不等式(9)，直接可得(10)式.

当 $n = 2$ 时，几何量 $\frac{H_{n-2}}{H_{n-1}}$ 为 $\frac{1}{\kappa}$. 因此，不等式(10)给出了(4)式中曲率函数的另一种情形. 注意到1-阶曲率函数 $F_1 = \frac{H_{n-2}}{H_{n-1}}$，故不等式(10)可直接改写为

$$\int_{x \in \partial K} F_1 \mathrm{d}S(x) \geqslant \left(\frac{S(K)^n}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

下面，我们将给出关于 F_k 的积分不等式.

定理 3 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^2 边界光滑的凸体，则

$$\int_{x\in\partial K} F_k \mathrm{d}S(x) \geqslant \frac{S(K)^{1+\frac{k}{n-1}}}{(n\omega_n)^{\frac{k}{n-1}}} \tag{11}$$

等号成立当且仅当 K 为球.

证 由代数-几何均值不等式，我们有

$$F_k = \binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1} r_{i_1}\cdots r_{i_k} \geqslant$$

$$\left(\frac{1}{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{n-1}}\right)^{\frac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n-1}{k}}} = \left(\frac{1}{H_{n-1}}\right)^{\frac{k}{n-1}} \tag{12}$$

当定理 1 中的 $t=-\dfrac{k}{n-1}$ 时，有

$$\int_{x\in\partial K} \left(\frac{1}{H_{n-1}}\right)^{\frac{k}{n-1}} \mathrm{d}S(x) \geqslant \frac{S(K)^{1+\frac{k}{n-1}}}{(n\omega_n)^{\frac{k}{n-1}}} \tag{13}$$

再由(12) 式，可得(11) 式.

参考文献：

[1] 蔺友江. 凸函数 Steiner 对称化的一个等价特征 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(8)：122-127.

[2] OSSERMAN R. Curvature in the Eighties [J]. Amer Math Monthly，1990，97(8)：731-756.

[3] PAN S L，XU H P. Stability of a Reverse Isoperimetric Inequality [J]. J Math Anal Appl，2009，350(1)：348-353.

[4] ROS A. Compact Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature and a Congruence Theorem [J]. J Diff Geom，1988，27(2)：215-220.

[5] ROS A. Compact Hypersurfaces with Constant Higher Order Mean Curvatures [J]. Revista Matemática Iberoamericana，1987，3(3)：447-453.

[6] SCHNEIDER R. Convex Bodies：the Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2014.

[7] 曾春娜，周家足，岳双珊. 两平面凸域的对称混合等周不等式 [J]. 数学学报，2012，55(2)：355-362.

[8] ZHANG Z L，ZHOU J Z. Bonnesen-Style Wulff Isoperimetric Inequality [J]. J Ineq Appl，2017，2017：42.

[9] 张增乐，罗 淼，陈方维. 平面上的新凸体与逆 Bonnesen -型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：27-30.

[10] 周家足，姜德烁，李 明，等. 超曲面的 Ros 定理 [J]. 数学学报，2009，52(6)：1075-1084.

[11] 周家足，任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式 [J]. 数学物理学报，2010，30(5)：1322-1339.

[12] 周 媛，张增乐. 平面上的逆 Bonnesen 型 Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(2)：70-74.

Integral Inequalities of Curvature for Convex Bodies in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$

ZHANG Zeng-le

School of Mathematics and Big Data，Chongqing University of Arts And Sciences，Yongchuan Chongqing 402160，China

Abstract：In this paper，some integral inequalities of curvature have been established for smooth convex bodies in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Those inequalities obtained are extensions of known integral inequalities of curvature in the plane $\mathbb{R}^2$.

Key words：smooth convex bodies；Gauss curvature；integral inequality of curvature

责任编辑 廖 坤