DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.10.021

关于不定积分的一题多解问题①

陈 芳, 任必聪

北京信息科技大学 理学院, 北京 100192

摘要: 不定积分在大学数学中有着举足轻重的地位，是学习大学物理、概率论与数理统计、微分方程等课程的基础知识. 求解不定积分的技巧性很强，而且目前可用的工具也很少，只有换元积分法和分部积分法两种最基本的解法. 从 3 道不定积分例题着手，采用换元积分法、分部积分法、添项法、万能公式法、欧拉代换法等多种方法对 3 道例题进行求解，最终总结了含根号或者幂次方、含分式、含三角函数这 3 类不定积分题型的求解方法. 通过一题多解的方式，帮助学生掌握系统的知识，培养发散性思维，解决更多类型的不定积分的求解方法.

关 键 词: 不定积分; 一题多解; 万能公式

中图分类号: O172.2; G642 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)10-0121-05

不定积分作为大学数学的核心部分，有着举足轻重的地位. 然而由于求解不定积分需要很高的技巧性以及对其它数学知识的灵活应用，所以很多同学都在不定积分的学习中遇到困难，在解决有关不定积分的问题时无从下手. 很多学者在关于不定积分一题多解的问题上做了很多工作[1-6]. 本文从实际出发，对 3 道不易求解的不定积分例题[7-8] 给出多种答题方法，让学生发现不定积分求解的奥秘，激发大家学习数学的兴趣. 下面我们开始分析这 3 道例题.

例 1 求不定积分 $I=\int \sec x \mathrm{d}x$.

解法 1[9] (添项法，此方法需要很高的技巧性和对三角函数的灵活应用)

$$I=\int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

解法 2 (添项法)

$$I=\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}=$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin x-1}-\frac{1}{\sin x+1}\right)\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$$

解法 3 (万能公式法，常规法)

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sec x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$，此时 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，那么

$$I=\int\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right|+C$$

解法 4 (换元法，此方法技巧性较高)

---

① 收稿日期: 2017-07-12

基金项目: 北京市教育委员会科技计划项目(KM201911232010); 北京信息科技大学 2017 年度教学改革项目(2017JGYB74).

作者简介: 陈 芳(1980-), 女, 副教授, 主要从事数值代数的研究.

$$I=\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

令 $t=x+\frac{\pi}{2}$，此时 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，那么

$$I=\int \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{t}{2}\right)}{\tan\frac{t}{2}}=$$

$$\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|+C=\ln\left|\tan\frac{2x+\pi}{4}\right|+C$$

下面通过万能公式[10-11] 来验证以上答案是等价的.

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

解法 1 中，$I=\ln|\sec x+\tan x|+C=\ln\left|\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{2t}{1-t^2}\right|+C=\ln\left|\frac{(1+t)^2}{(1+t)(1-t)}\right|+C=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$；

解法 2 中，$I=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{(1-t)^2}+C=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$；

解法 3 中，$I=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right|+C=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$；

解法 4 中，$I=\ln\left|\tan\frac{2x+\pi}{4}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C.$

通过验证，可以看到这 4 种解法都是等价的.

例 2 求不定积分 $I=\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解法 1 （换元法，该方法属于常规方法，没有技巧，比较麻烦，但是可以较好地锻炼计算能力）

令 $t=1-x^2$，当取 $x=\sqrt{1-t}$ 时，有 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$，此时

$$I=\int \frac{(\sqrt{1-t})^5}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

当取 $x=-\sqrt{1-t}$ 时，有 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$，此时

$$I=\int \frac{-(\sqrt{1-t})^5}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

上述两个结果是一样的，整理得

$$I=\int\left(-\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

解法 2 （换元法，比起解法 1 具有一定的技巧性，采用先化简再换元的方法，使计算更加简洁）

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x^2$$

令 $t=\sqrt{1-x^2}$，则 $x^2=1-t^2$，此时

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2)^2}{t}\mathrm{d}(1-t^2)=\int(-t^4+2t^2-1)\mathrm{d}t$$

整理得

$$I=-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

解法 3 （三角函数换元法）

令 $x=\sin t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. 此时

$$I=\int\frac{\sin^5 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int\sin^5 t\mathrm{d}t=-\int\sin^4 t\mathrm{d}(\cos t)=$$
$$-\int(1-\cos^2 t)^2\mathrm{d}(\cos t)=-\int(1+\cos^4 t-2\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)=$$
$$-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t+C$$

整理得

$$I=-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

解法 4 （与解法 3 类似）

令 $x=\cos t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=-\sin t\mathrm{d}t$，那么

$$I=\int\frac{\cos^5 t}{\sin t}(-\sin t)\mathrm{d}t=-\int\cos^4 t\mathrm{d}(\sin t)=$$
$$-\int(1-\sin^2 t)^2\mathrm{d}(\sin t)=\int(-1+2\sin^2 t-\sin^4 t)\mathrm{d}(\sin t)=$$
$$-\sin t+\frac{2}{3}\sin^3 t-\frac{1}{5}\sin^5 t+C$$

整理得

$$I=-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

例 3　求不定积分 $I=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

解法 1　先对 I 进行分母有理化，即

$$I=\int(x-\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$$

对于 $I_1=\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$，可以采用换元法和分部积分法来计算.

令 $x=\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sec t)$，此时

$$I_1=\int\sqrt{\sec^2 t-1}\mathrm{d}(\sec t)=\int\tan t\mathrm{d}(\sec t)=$$
$$\sec t\tan t-\int\sec t\mathrm{d}(\tan t)=\sec t\tan t-\int\sec^3 t\mathrm{d}t$$

因为

$$\int\sec^3 t\mathrm{d}t=\int(\tan^2 t+1)\sec t\mathrm{d}t=\int\tan t\mathrm{d}(\sec t)+\int\sec t\mathrm{d}t=I_1+\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

那么

$$I_1=\sec t\tan t-(I_1+\ln|\sec t+\tan t|+C_1)$$

整理得

$$2I_1 = \sec t \tan t - \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

即

$$2\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C_1$$

令 $C = \frac{1}{2}C_1$，进一步整理得

$$I = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

解法 2　同样先将 I 进行分母有理化，即

$$I = \int (x - \sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$$

此时，用欧拉代换[12] 计算.

令 $t = x - \sqrt{x^2-1}$，则 $x = \frac{t^2+1}{2t}$，进而有 $\mathrm{d}x = \frac{t^2-1}{2t^2}\mathrm{d}t$，此时

$$I = \int t \cdot \frac{t^2-1}{2t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(t - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}\ln|t| + C_2$$

即

$$I = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x-\sqrt{x^2-1}| - \frac{1}{2} + C_2$$

令 $C = -\frac{1}{2} + C_{2.}$，整理得

$$I = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

通过求解以上 3 个例题中的不定积分，我们意识到一题多解的前提是能熟练地掌握不定积分的两种最基本的解法 —— 换元法和分部积分法. 其次，针对不同的题型，我们总结了以下几种常用的方法：

1. 一般对于含根号或者幂次方的积分，可以首先考虑换元法(普通换元法和三角函数换元法)，整理后的式子会更易于积分.

2. 一般对于含分式的积分，可以先进行适当的化简，或者采用添项的方式去掉分式，从而减少计算量，之后再进行积分.

3. 一般对于含三角函数的积分，可以采用最原始的方法，考虑万能公式以减少参变量的个数.

4. 一题多解后一定要验证结果是否正确(若对所求结果求导等于被积函数则正确，否则错误).

通过用不同方法求解 3 个例题中的不定积分，我们意识到求解不定积分不是那么困难. 我们要不断地对这些解法进行思考，寻找出最适合的求解方法. 只有从不同的角度来思考问题，才能将我们的思维发挥到极致.

一题多解一方面提高了学生学习数学的兴趣、主动性和积极性，另一方面可使学生善于从多角度、多方位去探索同一问题，寻求新颖的解题方法. 可见，多解法开阔了解问题的思路，提高了解问题的应变能力，又可以最大限度地挖掘学生对已有知识应用的潜在能力，对大家以后的学习也会有很大的帮助.

参考文献：

[1] 李傅山. 数学分析中的问题与方法 [M]. 北京：科学出版社，2016：177-178.

[2] 刑秀侠. 不定积分的一题多解 [J]. 教育教学论坛，2016，15(4)：245-246.

[3] 吴维峰. 对不定积分一题多解的分析 [J]. 高等数学研究，2010，13(6)：11-13.

[4] 周登杰. 不定积分的两种遗解类型 [J]. 数学教学研究，2010，29(5)：44-45，48.

[5] 魏宏涛，康元宝. 浅谈微积分教学中不定积分的计算方法与技巧 [J]. 数学教学研究，2013，32(10)：49-52.

[6] 闵　兰，陈晓敏. 结构类比在多元微积分教学中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(10)：187-190.

[7] 李雪珊. 兴趣教学法在组合数学课程中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(12)：167-170.

[8] 黄玉梅，李　娜．“等价无穷小替换”求极限的教学思考［J］．西南师范大学学报（自然科学版），2017，42(7)：170-174．

[9] 盛炎平，李国成，苏　农．数学分析：上册［M］．北京：机械工业出版社，2015：135．

[10] 石　磊．利用三角函数万能公式进行换元积分［J］．科技信息，2010，20：104．

[11] 匡红勇．三角函数万能公式在解题中的应用［J］．成都教育学院学报，2001，15(7)：52．

[12] 华东师范大学数学系．数学分析：下册［M］．4 版．北京：高等教育出版社，1990．

On Multiple Solutions of Indefinite Integral Problems

CHEN　Fang，　REN Bi-cong

School of Applied Science，Beijing Information Science and Technology University，Beijing 100192，China

Abstract：Indefinite integral plays an important role in college mathematics，which is the basic knowledge of college physics，probability theory and mathematical statistics，differential equation and other courses. The technique of solving indefinite integral is strong，and there are few tools available. For the indefinite integral problems，there are only the two most basic solutions. They are the most basic substitution integration method and integration by parts of. This paper starts from three indefinite integral problems that are not easy to be solved. By using substitution integral method，integration by parts method，addition method，universal formula method，Euler substitution method and other methods，three examples are solved. Finally the method of indefinite integrals with square root or power，with fractions，with trigonometric functions are summarized. Through a way of multiple solutions to help student master knowledge systematically and foster divergent thinking. Do three by analogy，solve more types of indefinite integral problems.

Key words：indefinite integral；multiple solutions of one problem；universal formula

责任编辑　廖　坤