第 44 卷 第 11 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 11 月
Vol. 44 No. 11 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Nov. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.11.001

线性回归模型的一类新约束型 LIU 估计①

黄荣臻[1], 朱 宁[1,2], 邓超海[1], 张茂军[1]

1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院,广西 桂林 541004;
2. 桂林电子科技大学 信息科技学院,广西 桂林 541004

摘要: 针对带线性约束型的回归模型复共线性问题,提出了一种新估计,称之为修正约束型 LIU 估计,给出了新估计的性质. 在均方误差准则基础上证明了在一定条件下,修正约束型 LIU 估计优于最小二乘估计、岭估计、修正岭估计和约束型 LIU 估计,最后讨论了新估计的可容许性.

关 键 词: 线性回归模型;约束型 LIU 估计;修正约束型 LIU 估计;均方误差;可容许性

中图分类号: O212.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)11-0001-10

线性统计模型是现代统计学中应用最为广泛的模型之一,同时是其他统计模型研究或应用的基础.

考虑如下线性回归模型:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e},\ \mathrm{E}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0},\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{y}$ 是 $n \times 1$ 观测向量,$\boldsymbol{X}$ 是 $n \times p$ 列满秩设计矩阵,$\boldsymbol{\beta}$ 是 $p \times 1$ 待估回归系数向量,$\boldsymbol{e}$ 是 $n \times 1$ 随机误差向量,$\boldsymbol{I}_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵.

对于待估回归系数向量 $\boldsymbol{\beta}$,Geer[1] 给出了其最小二乘估计:$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$,并证明了最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 是一个无偏估计. 但当设计阵 $\boldsymbol{X}$ 含有多重共线关系时,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 接近奇异,则至少有一个特征值 λ_i 接近于 0,此时利用最小二乘估计得到的参数将严重偏离实际值.

当设计阵呈"病态"时,为了改进最小二乘估计,人们提出了一系列有偏估计[2-7].

均方误差(MSE)是统计回归分析中评价一个估计优劣的标准,MSE 越小,估计越稳定,估计效果越好. 本文基于先验信息和随机扩展约束,在修正岭估计和约束型 LIU 估计的基础上,提出了修正约束型 LIU 估计,研究了新估计的一些性质,在均方误差准则下证明了在一定条件下此估计优于约束型 LIU 估计、最小二乘估计、岭估计和修正岭估计,并讨论了新估计的可容许性,最后通过实证分析验证新估计的优良性.

1 修正约束型 LIU 估计

考虑模型(1)的典则形式:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z\alpha} + \boldsymbol{e},\ \mathrm{E}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0},\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n \tag{2}$$

其中:$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{XQ}$,$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{Q}$ 是 p 阶正交矩阵,$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{XQ} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$,$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p$

---

① 收稿日期:2017-12-07

基金项目:国家自然科学基金项目(71461005);国家科技支撑计划课题(2015BAL04B0305);广西科技重点研发计划项目(桂科 AB16380321);广西自然科学基金项目(2016GXNSFBA380102).

作者简介:黄荣臻(1992-),男,硕士研究生,主要从事应用统计研究.

通信作者:朱 宁,教授.

为 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 的特征值.

对于线性回归模型，回归系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的岭估计定义为：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{3}$$

其典则形式为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k)=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$，其中 $k\geqslant 0$ 称为岭参数.

基于先验信息，文献[3]对岭估计进行修正，提出了修正岭估计(MRE)：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+k\boldsymbol{B}) \tag{4}$$

其典则形式为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}+k\boldsymbol{b})$，其中 $\boldsymbol{B}=t\boldsymbol{\beta}(0<t<1)$ 是给定的非随机向量，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{B}$. 当 $k\to+\infty$ 时 MRE 趋近于 $\boldsymbol{B}$，当 $k=0$ 时 MRE 为最小二乘估计，因此 $\boldsymbol{B}$ 可以表示为 $\boldsymbol{\beta}$ 上的先验信息[3].

文献[4]在 Stein 估计和岭估计的基础上提出了 LIU 估计：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(d)=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})\hat{\beta} \tag{5}$$

其典则形式为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(d)=(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$，其中 $0<d<1$.

文献[6]通过构造附加随机线性约束 $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{\beta}}}{k^{\frac{1}{2}}}=k^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}\sim(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{I}_{P\times p})$，并结合 LIU 估计、最小二乘估计和岭估计提出了约束型 LIU 估计：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+d\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{6}$$

其典则形式为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$，其中 $k>0$，$0<d<1$.

约束型 LIU 估计的目标函数为

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})+\left(k^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\beta}-\frac{d\boldsymbol{\beta}}{k^{\frac{1}{2}}}\right)\left(k^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\beta}-\frac{d\boldsymbol{\beta}}{k^{\frac{1}{2}}}\right)' \tag{7}$$

使式(7)达到最小值的解就是约束型 LIU 估计.

令 $\boldsymbol{L}_k=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_k=&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I}-k\boldsymbol{I})=\\&\boldsymbol{I}-k(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\end{aligned}$$

因此可得修正岭估计为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,\boldsymbol{B})=&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+k\boldsymbol{B})=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+k(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}-[\boldsymbol{I}-k(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}]\boldsymbol{B}=\\&\boldsymbol{L}_k\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}_k)\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{8}$$

从式(8)可以看出修正岭估计是一个先验信息 $\boldsymbol{B}$ 和最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的凸组合.

在修正岭估计的基础上，对约束型 LIU 估计引入先验信息 $\boldsymbol{B}$ 和最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 组合，可类似得到新的约束型 LIU 估计，称之为修正约束型 LIU 估计(MRLE).

根据式(8)，令 $\boldsymbol{H}_{(k,d)}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}-(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}$，并用 $\boldsymbol{H}_{(k,d)}$ 替换式中的 $\boldsymbol{L}_k$，可得修正约束型 LIU 估计为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})=&\boldsymbol{H}_{(k,d)}\hat{\boldsymbol{\beta}}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{(k,d)})\boldsymbol{B}=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}+\{\boldsymbol{I}-[\boldsymbol{I}-(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}]\}\boldsymbol{B}=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}=\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}+(k-d)\boldsymbol{B}]=$$
$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+(k-d)\boldsymbol{B}] \tag{9}$$

其中 $k>0$，$-\infty<d<+\infty$.

其典则形式为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b})=\boldsymbol{Q}'\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}+(k-d)\boldsymbol{b}] \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$，$\lambda_i(i=1,\cdots,p)$ 表示 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 的特征值.

由式(9)修正约束型 LIU 估计可变形为：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})=&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+(k-d)\boldsymbol{B}]=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+(k-d)\boldsymbol{B}]=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})[\hat{\beta}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}]=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I}-d\boldsymbol{I}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})[\hat{\boldsymbol{\beta}}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}]=\\&[\boldsymbol{I}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}]^{-1}[\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}]=\\&[\boldsymbol{I}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{11}$$

$\|\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}\|=\|[\boldsymbol{I}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B})\|$ 称为修正约束型 LIU 估计的欧氏距离.

令 $p=k-d$，从式(11)可以看出，当 $\hat{\boldsymbol{\beta}}\neq\boldsymbol{B}$ 时，对任意的 X 和 y，都有 $\lim\limits_{p\to0}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})=\hat{\boldsymbol{\beta}}$，以及 $\lim\limits_{p\to+\infty}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}$，因此当 p 从零无限增加时，$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})$ 是一条经过 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 参数空间的曲线，随着 $k-d$ 不断增大，$\|[\boldsymbol{I}+(k-d)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B})\|$ 严格单调递减，$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})$ 无限接近于先验信息 $\boldsymbol{B}$.

设 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的一组估计类，则 $g(\tilde{\boldsymbol{\beta}})=(\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B})'(\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B})$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的距离函数，考虑 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的残差平方和 $f(\tilde{\boldsymbol{\beta}})=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}})$. 以 $f(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$ 为目标函数，$g(\tilde{\boldsymbol{\beta}})=\boldsymbol{c}$ 为约束条件，构造辅助函数

$$F(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\xi)=f(\tilde{\boldsymbol{\beta}})+\xi(g(\tilde{\boldsymbol{\beta}})-\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{y}-X\tilde{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}})+\xi((\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B})'(\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{c}) \tag{12}$$

其中 ξ 为拉格朗日乘子. 显然 $F(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$ 是 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的严格凸函数，令 $\xi=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(k-d)$，由 $\dfrac{\partial F(\tilde{\boldsymbol{\beta}})}{\partial\tilde{\boldsymbol{\beta}}}=0$ 可求得

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}=&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\xi)^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+\xi\boldsymbol{B})=\\&[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(k-d)]^{-1}[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(k-d)\boldsymbol{B}]=\\&\{[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I}+(k-d)\boldsymbol{I}](\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\}^{-1}[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(k-d)\boldsymbol{B}]=\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+(k-d)\boldsymbol{B}]=\\&\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{13}$$

即在 $\boldsymbol{\beta}$ 的一组与 $\boldsymbol{B}$ 有相同距离的等价估计类中，$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})$ 的残差平方和最小，因此引入先验信息 $\boldsymbol{B}$ 后，数据与模型拟合效果更好.

容易看出 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})$ 有如下特殊形式：

1) $\hat{\boldsymbol{\beta}}(1,1,\boldsymbol{B})=\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ 为最小二乘估计；

2) $\hat{\boldsymbol{\beta}}(1,d,0)=\hat{\boldsymbol{\beta}}(d)=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+d)\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 为 LIU 估计；

3) $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,0,0)=\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ 为岭估计；

4) $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, 0, B) = \hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + k\boldsymbol{B})$ 为修正岭估计;

5) $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, 0) = \hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + d\hat{\boldsymbol{\beta}})$ 为约束型 LIU 估计.

2 修正约束型 LIU 估计的性质

修正约束型 LIU 估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B})$ 具有如下性质:

性质 1 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B})$ 是 $\hat{\beta}$ 的一个线性变换.

证

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B}) = & (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\beta}} + (k-d)\boldsymbol{B}] = \\ & (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\beta}} + (k-d)t\boldsymbol{\beta}]\end{aligned}$$

用最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 代替未知参数 $\boldsymbol{\beta}$ 可得

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I}) + t(k-d)]\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I}) + t(k-d)] = \boldsymbol{Q}(\Lambda + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\Lambda + d\boldsymbol{I}) + t(k-d)\boldsymbol{I}]\boldsymbol{Q}'$, $0 < t < 1$.

证毕.

性质 2 $\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B})) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I}) + t(k-d)]\boldsymbol{\beta}$.

证

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B})) = & \mathrm{E}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\beta}} + (k-d)\boldsymbol{B}]) = \\ & (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + t(k-d)\boldsymbol{\beta}] = \\ & (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I}) + t(k-d)]\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

证毕.

性质 3 $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B})) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}$.

证

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B})) = & \mathrm{Cov}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + (k-d)\boldsymbol{B})) = \\ & \mathrm{Cov}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}) + (k-d)\boldsymbol{B})) = \\ & (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{Cov}(\boldsymbol{e})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1} = \\ & \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{I})'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{I})^{-1}\end{aligned}$$

证毕.

性质 4 当 $k > d$ 时, $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B})$ 是一个有偏、压缩估计,即 $\|\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B}))\| < \|\boldsymbol{\beta}\|$.

证 因为 $k > d$ 时,有 $\dfrac{\lambda_i + d + t(k-d)}{\lambda_i + k} < 1$, $0 < t < 1$,所以

$$\|\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, d, \boldsymbol{B}))\| = \|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Lambda} + k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{\Lambda} + d\boldsymbol{I}) + t(k-d)\boldsymbol{I}]\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\beta}\| < \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\beta}\|$$

证毕.

3 新估计的优良性

均方误差(MSE)反映了估计量与被估计量之间的差异程度,其定义为

定义 1[2] 设 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个估计,则 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的均方误差矩阵为 $\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})'$,其中 $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathrm{E}[(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \mathrm{E}\hat{\boldsymbol{\alpha}})'(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \mathrm{E}\hat{\boldsymbol{\alpha}})]$, $\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha})$.

定义 2[2] 设 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个估计,称 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathrm{tr}[\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})] = \mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})] + \mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})'$ 为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$

的均方误差.

修正约束型 LIU 估计的偏差向量为

$$\begin{aligned}\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))=\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))-\boldsymbol{\alpha}=&\\ &\mathrm{E}[(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{\alpha}}+(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(k-d)\boldsymbol{b}]-\boldsymbol{\alpha}=\\ &(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})\alpha+(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(k-d)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}=\\ &\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}_d)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}=\\ &(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

其中：$\boldsymbol{\alpha}$ 表示典则回归系数向量，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$ 表示典则回归系数的最小二乘估计向量.

由性质 3 可知，修正约束型 LIU 估计的协方差矩阵为

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))=\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-2}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=\sigma^2\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d$$

其中 $\boldsymbol{F}_d=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})$.

因此可得修正约束型 LIU 估计的均方误差矩阵为

$$\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))=\sigma^2\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d+(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})' \tag{14}$$

引理 1[7]　设 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}$，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的两个齐次线性估计，使得 $\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}'_1-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}'_2)>0$，则当且仅当 $\boldsymbol{b}'_2[\delta\boldsymbol{D}+\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}'_1]^{-1}\boldsymbol{b}_2<1$ 时有

$$\Delta(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1,\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)=\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1)-\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)=\delta\boldsymbol{D}+\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}'_1-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}'_2>0$$

其中 $\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i)=\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i)+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}'_i$，$\boldsymbol{b}_i=\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i)=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\beta}$，$i=1,2$.

引理 2[8]　设 $\boldsymbol{M}$ 为正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为某一向量，则 $\boldsymbol{M}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'>0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}<1$.

3.1　修正约束型 LIU 估计与岭估计的比较

定理 1　令 $-2\lambda_i<d<0$，当且仅当 $\boldsymbol{b}'_2(\sigma^2\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}'_1)^{-1}\boldsymbol{b}_2<1$ 时，修正约束型 LIU 估计比岭估计具有更小的均方误差.

证　岭估计的偏差向量和协方差矩阵分别为：

$$\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))=\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))-\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=-k(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))=\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}=\sigma^2\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}'_k$$

其中 $\boldsymbol{F}_k=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}$，所以有

$$\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))=\sigma^2\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}'_k+k^2\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{F}'_k$$

令 $\Delta_2=\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))-\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$，则

$$\begin{aligned}\Delta_2=&\sigma^2(\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}'_k-\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d)+(-k)\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\alpha}(-k)\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{F}'_k-(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})'=\\ &\sigma^2\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}'_1-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}'_2\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}'_k-\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_p)\boldsymbol{Q}'$，$\tau_i=\dfrac{-d(2\lambda_i+d)}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}$，

$$\boldsymbol{b}_1=(-k)\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{\alpha}\qquad \boldsymbol{b}_2=(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})$$

当 $-2\lambda_i<d<0$ 时，有 $\tau_i>0$，即 $\boldsymbol{D}_1>0$.

由引理 1 可知，当且仅当 $\boldsymbol{b}'_2[\sigma^2\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}'_1]^{-1}\boldsymbol{b}_2<1$ 时，有 $\Delta_2>0$，此时 $\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))>\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$ 即修正约束型 LIU 估计比岭估计具有更小的均方误差.

证毕.

推论 1　存在 $d_{11}^*=\dfrac{\Delta^{\frac{1}{2}}-2g_i(k)}{2f_i(k)}>0$，对任意的 $0<d<d_{11}^*$ 使得下式成立.

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))<\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))$$

其中：$f_i(k)=\dfrac{\sigma^2+\lambda_i(\alpha_i-b_i)^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}$，$g_i(k)=\dfrac{\sigma^2-k(\alpha_i-b_i)^2}{(\lambda_i+k)^2}$，$h_i(k)=\dfrac{k^2b(2\alpha_i-b_i)}{(\lambda_i+k)^2}$，$\Delta=4g_i^2(k)+4f_i(k)h_i(k)$.

证　由定义2可知

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))=\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{(\lambda_i+d)^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}+\sum_{i=1}^{p}\frac{(d-k)^2(\alpha_i-b_i)^2}{(\lambda_i+k)^2}$$

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))=\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2}+\sum_{i=1}^{p}\frac{k^2\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))-\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k))=&d^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\sigma^2+\lambda_i(\alpha_i-b_i)^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}+2d\sum_{i=1}^{p}\frac{\sigma^2-k(\alpha_i-b_i)^2}{(\lambda_i+k)^2}-\sum_{i=1}^{p}\frac{k^2b(2\alpha_i-b_i)}{(\lambda_i+k)^2}=\\&d^2\sum_{i=1}^{p}f_i(k)+2d\sum_{i=1}^{p}g_i(k)-\sum_{i=1}^{p}h_i(k)=\\&\sum_{i=1}^{p}f_i(k,b)d^2+2dg_i(k,b)-h_i(k,b)\end{aligned}$$

其中：$f_i(k)=\dfrac{\sigma^2+\lambda_i(\alpha_i-b_i)^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}$，$g_i(k)=\dfrac{\sigma^2-k(\alpha_i-b_i)^2}{(\lambda_i+k)^2}$，$h_i(k)=\dfrac{k^2b(2\alpha_i-b_i)}{(\lambda_i+k)^2}$.

这是一个关于d的二次函数，图像开口向上，记

$$h(d)=d^2f_i(k)+2dg_i(k)-h_i(k)$$

其判别式以及两个根分别为

$$\Delta=4g_i^2(k)+4f_i(k)h_i(k)\geqslant 0$$

$$d_{11}^*=\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}-2g_i(k,b)}{2f_i(k,b)},\ d_{12}^*=\frac{-\Delta^{\frac{1}{2}}-2g_i(k,b)}{2f_i(k,b)}<0$$

当$d_{11}^*>0$时，对任意的$0<d<d_{11}^*$，有$h(d)<0$，此时有$\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}(k,d,b))<\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}(k))$.

证毕.

3.2　修正约束型LIU估计与修正岭估计的比较

定理2　令$-2\lambda_i<d<0$，当且仅当$\boldsymbol{b}'_2[\sigma^2\boldsymbol{D}_3+\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}'_3]^{-1}\boldsymbol{b}_2<1$时，修正约束型LIU估计比修正岭估计具有更小的均方误差.

证　修正岭估计的偏差向量和协方差矩阵分别为：

$$\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,\boldsymbol{b}))=\tilde{\boldsymbol{F}}_k\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{F}}_k)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha}=(\tilde{\boldsymbol{F}}_k-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,b))=\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}=\sigma^2\tilde{\boldsymbol{F}}_k\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}'_k$$

其中$\tilde{\boldsymbol{F}}_k=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}$，所以有

$$\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,\boldsymbol{b}))=\sigma^2\tilde{\boldsymbol{F}}_k\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}'_k+(\tilde{\boldsymbol{F}}_k-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'(\tilde{\boldsymbol{F}}_k-\boldsymbol{I})'$$

令$\Delta_4=\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,\boldsymbol{b}))-\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$，则

$$\begin{aligned}\Delta_4=&\sigma^2(\tilde{\boldsymbol{F}}_k\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}'_k-\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d)+(\tilde{\boldsymbol{F}}_k-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'(\tilde{\boldsymbol{F}}_k-\boldsymbol{I})'-(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})'=\\&\sigma^2\boldsymbol{D}_3+\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}'_3-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}'_2\end{aligned}$$

其中$D_3=\tilde{\boldsymbol{F}}_k\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}'_k-\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_p)\boldsymbol{Q}'$，$\upsilon_i=\dfrac{-d(2\lambda_i+d)}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}=\tau_i$，

$$\boldsymbol{b}_1=(\tilde{\boldsymbol{F}}_k-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{b}_2=(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})$$

当$-2\lambda_i<d<0$时，有$\upsilon_i>0$，即$\boldsymbol{D}_3>0$.

由引理 1 可知，当且仅当 $\boldsymbol{b}'_2[\sigma^2\boldsymbol{D}_3+\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}'_3]^{-1}\boldsymbol{b}_2<1$ 时，有 $\Delta_4>0$，此时 $\mathrm{MSEM}(\hat{\alpha}(k,\boldsymbol{b}))>\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$，即修正约束型 LIU 估计比修正岭估计具有更小的均方误差.

证毕.

推论 2　存在 $d_{21}^*=2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i[\sigma^2-k(\alpha_i-b_i)^2]}{\sigma^2+\lambda_i(\alpha_i-b_i)^2}>0$，对任意的 $0<d<d_{21}^*$ 使得下式成立

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))<\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}(k,\boldsymbol{b}))$$

证　由定义 2 可知

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,\boldsymbol{b}))=\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2}+\sum_{i=1}^{p}\frac{k^2(\alpha_i-b_i)^2}{(\lambda_i+k)^2}$$

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))-\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,\boldsymbol{b}))=d^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\sigma^2+\lambda_i(\alpha_i-b_i)^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}+2d\sum_{i=1}^{p}\frac{\sigma^2-k(\alpha_i-b_i)^2}{(\lambda_i+k)^2}$$

这是一个关于 d 的二次函数，图像开口向上，其两个根分别为

$$d_{21}^*=2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i[\sigma^2-k(\alpha_i-b_i)^2]}{\sigma^2+\lambda_i(\alpha_i-b_i)^2},\ d_{22}^*=0$$

当 $d_{21}^*>0$ 时，对任意的 $0<d<d_{21}^*$，有 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))<\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,\boldsymbol{b}))$.

证毕.

3.3　修正约束型 LIU 估计与约束型 LIU 估计的比较

定理 3　当且仅当 $\boldsymbol{\alpha\alpha}'-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'\geqslant 0$ 时，修正约束型 LIU 估计比约束型 LIU 估计具有更小的均方误差 .

证　约束型 LIU 估计的偏差向量和协方差矩阵分别为：

$$\mathrm{Bias}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))=E(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))-\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))=\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})'(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}=\sigma^2\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d$$

根据均方误差定义可得

$$\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))=\sigma^2\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d+(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha\alpha}'(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})'$$

令 $\Delta_1=\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))-\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$，则有

$$\begin{aligned}\Delta_1=&(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha\alpha}'(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})'-(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})'=\\&(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})[\boldsymbol{\alpha\alpha}'-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'](\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})'\end{aligned}$$

因此，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha\alpha}'-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'\geqslant 0$ 时，$\Delta_1\geqslant 0$，此时 $\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))\geqslant\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$，即修正约束型 LIU 估计比约束型 LIU 估计具有更小的均方误差.

证毕.

3.4　修正约束型 LIU 估计与最小二乘估计的比较

定理 4　对任意的 $0<d<k$，当且仅当 $\boldsymbol{b}'_2(\sigma^2\boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{b}_2<1$ 时，修正约束型 LIU 估计比最小二乘估计具有更小的均方误差.

证　最小二乘估计的均方误差为 $\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})=\sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$.

令 $\Delta_3=\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})-\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$，则

$$\begin{aligned}\Delta_3=&\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}-\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d)-(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})'=\\&\sigma^2\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}'_2\end{aligned}$$

其中：$\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}-\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}'_d=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p)\boldsymbol{Q}'$，$\gamma_i=\frac{(2\lambda_i+k+d)(k-d)}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}$，$\boldsymbol{b}_2=(\boldsymbol{F}_d-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{b})$.

对任意的 $0<d<k$，有 $\gamma_i>0$，即$\boldsymbol{D}_2>0$.

由引理2可知，当且仅当$\boldsymbol{b}'_2(\sigma^2\boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{b}_2<1$时，有 $\Delta_3>0$，此时 $\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})>\mathrm{MSEM}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d,\boldsymbol{b}))$，即修正约束型LIU估计比最小二乘估计具有更小的均方误差.

证毕.

4 新估计的可容许性

参数估计的可容许性是从统计判决的角度来衡量估计的优良性的一种标准，它是衡量估计优良性的重要准则之一[9]. 本文在二次损失函数下讨论修正约束型LIU估计的可容许性.

引理3[10] 对于线性回归模型，若 $R(X_{n\times p})=p$，则 $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 是 $\boldsymbol{C\beta}$ 的可容许性估计的充分必要条件为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}'\leqslant\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{C}'$$

定理5 修正约束型LIU估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})$ 在二次损失下是 $\boldsymbol{\beta}$ 的可容许性估计.

证 因为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})+t(k-d)]\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{Q}'[(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})+t(k-d)](\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Q}=$$

$$\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}\left\{\frac{[(\lambda_i+d)+t(k-d)]^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^2}\right\}\boldsymbol{Q}'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{I})^{-1}[(\boldsymbol{\Lambda}+d\boldsymbol{I})+t(k-d)]\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}=$$

$$\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}\left\{\frac{(\lambda_i+d)+t(k-d)}{\lambda_i(\lambda_i+k)}\right\}\boldsymbol{Q}'$$

所以$\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}'}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}\left\{\dfrac{\lambda_i+tk+(1-t)d}{\lambda_i+k}\right\}\boldsymbol{Q}'$.

当 $k\geqslant d$ 时，有$\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}'}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}}\leqslant 1$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}'\leqslant\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$.

根据引理3知，$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d,\boldsymbol{B})$ 在线性估计类中是 $\boldsymbol{\beta}$ 的可容许性估计.

证毕.

5 实证分析

为了进一步考察新估计的均方误差的表现，对以上估计类的均方误差进行Monte Carlo数值模拟研究. 选取 Portland cement 数据[5] 进行分析，其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&7&2&6&6\\1&1&29&15&52\\1&11&56&8&20\\1&11&31&8&47\\1&7&52&6&33\\1&11&55&9&22\\1&3&71&17&6\\1&1&31&22&44\\1&2&54&18&22\\1&21&47&4&26\\1&1&40&23&34\\1&11&66&9&12\\1&10&68&8&12\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}78.5\\74.3\\104.3\\87.6\\95.9\\109.2\\102.7\\72.5\\93.1\\115.9\\83.8\\113.3\\109.4\end{pmatrix}$$

利用最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 代替未知参数 $\boldsymbol{\beta}$ 和 σ^2，并令先验信息 $\boldsymbol{B}=0.95\hat{\boldsymbol{\beta}}$. 对设计阵 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 进行标准化，计算出该设计阵的特征值分别为：

$$\lambda_1=44\,676.206，\lambda_2=5\,965.422，\lambda_3=800.952，\lambda_4=105.419，\lambda_5=0.001\,22$$

于是条件数为 $k=\frac{\lambda_1}{\lambda_5}=3.662\times10^7$，这个条件数远远大于 1 000，说明设计阵存在严重的复共线性[11].

下面分别取 $d=0.01,0.05,0.1$，$k=0.1,0.5,0.9$，得出最小二乘估计(LSE)、岭估计(RE)、修正岭估计(MRE)、约束型 LIU 估计(RLE) 和修正约束型 LIU 估计(MRLE) 的均方误差如表 1 所示.

表 1　5 种估计的均方误差模拟结果

估计	$d=0.01$			$d=0.05$			$d=0.1$		
	$k=0.1$	$k=0.5$	$k=0.9$	$k=0.1$	$k=0.5$	$k=0.9$	$k=0.1$	$k=0.5$	$k=0.9$
LSE	3 897	3 897	3 897	3 897	3 897	3 897	3 897	3 897	3 897
RE	3 843	3 867	3 874	3 843	3 867	3 874	3 843	3 867	3 874
MRE	9.61	9.67	9.69	9.61	9.67	9.69	9.61	9.67	9.69
RLE	3 468	2 162	960.8	3 676	2 960	2 150	3 746	3 256	2 691
MRLE	8.67	5.40	2.40	9.19	7.40	5.44	9.37	8.14	6.73

从表 1 可以看出，在均方误差准则下，当 $k>0$，$0<d<1$ 时，修正约束型 LIU 估计的均方误差远远小于最小二乘估计、岭估计和约束型 LIU 估计的均方误差小，同时也比修正岭估计有更小的均方误差. 并且可以发现，当固定 k 的值时，修正约束型 LIU 估计的均方误差随着 d 的减小而减小；当固定 d 的值时，修正约束型 LIU 估计的均方误差随着 k 的增大而减小. 因此，当数据存在严重的复共线性时，修正约束型 LIU 估计的结果较好，利用修正约束型 LIU 估计进行参数估计具有实际意义.

6　结　　论

本文提出的修正约束型 LIU 估计，通过引入先验信息 B 可以克服约束型 LIU 估计在参数估计中处理复共线性上的不足；通过调节给出的变参数 d 减少了 MRE 单纯利用 k 值带来的估计偏差，从而减少估计的 MSE. 从实证分析可以看出，当先验信息固定时，均方误差随着 $|k-d|$ 的增大而减少. 所给出的随机线性约束避免了估计参数 $\boldsymbol{\beta}$ 在某些方向上严重偏离实际值，而增加 $\boldsymbol{\beta}$ 的先验信息后对 $\boldsymbol{\beta}$ 进行统计推断，其估计结果更可信，因而该估计方法更具有统计意义.

参考文献：

[1] GEER S. Least Squares Estimation [M]//Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.

[2] 王松桂. 线性统计模型：线性回归与方差分析 [M]. 北京：高等教育出版社，1999.

[3] SWINDEL B F. Good Ridge Estimators Based on Prior Information [J]. Communication in Statistics-Theory and Methods, 1976, 5(11): 1065-1075.

[4] LIU K J. A New Class of Biased Estimate in Linear Regression [J]. Communication in Statistics- Theory and Methods, 1993, 22(2): 393-402.

[5] LI Y L, YANG H. A New Liu-Type Estimator in Linear Regression Model [J]. Statistical Papers, 2012, 53(2): 427-437.

[6] HUANG W H, QI J J, HUANG N T. Liu-Type Estimation for a Linear Regression Model with Linear Restrictions [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2009, 29(7): 937-946.

[7] 李屹旭，张　俊. 奇异改进型岭估计及其在大地测量中的应用 [J]. 贵州大学学报(自然科学版)，2007，24(2)：125-128.

[8] TRENKLER G, TOUTENBURG H. Mean Squared Error Matrix Comparisons Between Biased Estimators—An Over-

view of Recent Results [J]. Statistical Papers, 1990, 31(1): 165-179.
[9] FAREBROTHER R W. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1976, 38(3): 248-250.
[10] 王惠惠. 几类线性模型中的可容许性估计 [D]. 北京: 北京交通大学, 2008.
[11] 王松桂. 线性模型的理论及其应用 [M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1987.

A New Class of Restricted Type LIU Estimator for Linear Regression Models

HUANG Rong-zhen[1], ZHU Ning[1,2],
DENG Chao-hai[1], ZHANG Mao-jun[1]

1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin Guangxi 541004, China;
2. Institute of Information Technology of GUET, Guilin Guangxi 541004, China

Abstract: For the problem of multicollinearity in linear model with linear restricted, a new class of restricted type LIU estimator has been proposed, and the properties of the new estimator is given. Under certain conditions, we proved that this estimator is superior to LSE, ridge estimator, modified ridge estimator and restricted LIU estimator. At last the admissibility of estimator is discussed.

Key words: linear regression model; restricted type LIU estimator; modified restricted type LIU estimator; mean square error; admissibility

责任编辑 张 枸