第 44 卷　第 11 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 11 月
Vol. 44　No. 11　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Nov.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.11.003

# 解热传导方程的一族高精度隐式差分格式①

谭志明[1,2]，　罗森月[1,2]

1. 广东开放大学 基础教学部，广州 510091；2. 广东理工职业学院 基础教学部，广东 中山 528458

**摘要：** 用待定系数法构造了求解抛物型方程的一族高精度隐式格式. 格式的截断误差达到 $O(\tau^3+h^4)$. 通过 Fourier 方法证明了当 $r<\frac{1}{2}$ 时，差分格式是稳定的. 通过数值试验，比较了差分格式的解和精确解的区别，说明了差分格式的有效性.

**关　键　词：** 一维抛物型方程；隐式差分格式；截断误差

**中图分类号：** O241.82　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2019)11－0018－06

在渗流、扩散、热传导等领域中经常会遇到求解抛物型方程的问题. 在一维的情形，其模型为初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ a>0\\ u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant L\\ u(0,t)=u(L,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\end{cases}\tag{1}$$

对问题(1)的求解，有限差分法是解决此类问题的常用方法，常见的差分格式[1-2]，诸如古典隐格式、Crank-Nicolson 格式和 Dufort-Frankel 格式等，虽都是绝对稳定的，但它们的截断误差较低. 古典隐格式和 Crank-Nicolson 格式的截断误差分别是 $O(\tau+h^2)$，$O(\tau^2+h^2)$；Dufort-Frankel 格式的截断误差为 $O\left(\tau^2+h^2+\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right)$，当 $\tau=h$ 时还失去了相容性. 目前已有许多研究对上述问题进行了改进[3-9]，在这些研究成果中，有一些高精度的差分格式，如：文献[8]给出了一族高精度恒稳格式，格式的截断误差达 $O(\tau^2+h^6)$；文献[9]则构造了一族六点隐式差分格式，格式的截断误差为 $O(\tau^2+h^4)$，本文则构造了一族高精度的三层九点隐式格式，格式的截断误差达到了 $O(\tau^3+h^4)$，稳定性条件为 $0<r<\frac{1}{2}$.

## 1　格式的构造

设时间步长为 $\tau$，空间步长为 $h=\frac{L}{M}$（$M$ 为正整数），对区域$[0,L]\times[0,T]$作矩形剖分，取局部结点集为

---

① 收稿日期：2018－03－07
基金项目：广东省普通高校青年创新人才自然科学类项目(2015KQNCX243).
作者简介：谭志明(1983－)，男，讲师，主要从事微分方程数值解及代数学研究.

$\{(x_{j-1},t_{n+1}),(x_j,t_{n+1}),(x_{j+1},t_{n+1}),(x_{j-1},t_n),(x_j,t_n),(x_{j+1},t_n),(x_{j-1},t_{n-1}),(x_j,t_{n-1}),(x_{j+1},t_{n-1})\}$
其中 $x_j = jh$，$t_n = n\tau$，并令 $u_j^n = u(x_j, t_n)$.

当问题(1)的解充分光滑时，有关系式

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial t^n} = a^n \frac{\partial^{m+2n}u}{\partial x^{m+2n}},\ m,n \in N \tag{2}$$

将各节点上 $u$ 的值在节点$(jh, n\tau)$处作 Taylor 展开，并使用(2)式进行整理，可导出各差商的渐近表达式：

$$\Delta_t u_{j-1}^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n - ha\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \frac{h^2 a(r+1)}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n - \frac{h^3 a(3r+1)}{6}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_j^n + O(\tau^2 + h^4)$$

$$\Delta_t u_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \frac{h^2 ar}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + O(\tau^2)$$

$$\Delta_t u_{j+1}^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + ha\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \frac{h^2 a(r+1)}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + \frac{h^3 a(3r+1)}{6}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_j^n + O(\tau^2 + h^4)$$

$$\Delta_t u_{j-1}^{n-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n - ha\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \frac{h^2 a(r+1)}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n - \frac{h^3 a(1-3r)}{6}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_j^n + O(\tau^2 + h^4)$$

$$\Delta_t u_j^{n-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n - \frac{h^2 ar}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + O(\tau^2)$$

$$\Delta_t u_{j+1}^{n-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + ha\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \frac{h^2 a(1-r)}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + \frac{h^3 a(1-3r)}{6}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_j^n + O(\tau^2 + h^4)$$

$$\delta_x^2 u_j^{n+1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + h^2\left(r + \frac{1}{12}\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + O(\tau^2 + h^4)$$

$$\delta_x^2 u_j^{n-1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + h^2\left(-r + \frac{1}{12}\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + O(\tau^2 + h^4)$$

其中 $r = \frac{a\tau}{h^2}$，$\Delta_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}$，$\delta_x^2 u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$，其余类推.

用上述差商建立如下含参数的差分方程逼近微分方程(1)

$$\frac{c_1}{3}(\Delta_t u_{j+1}^n + \Delta_t u_j^n + \Delta_t u_{j-1}^n) + \frac{c_2}{3}(\Delta_t u_{j+1}^{n-1} + \Delta_t u_j^{n-1} + \Delta_t u_{j-1}^{n-1}) = ac_3\delta_x^2 u_j^{n+1} + ac_4\delta_x^2 u_j^n + ac_5\delta_x^2 u_j^{n-1} \tag{3}$$

其中 $c_i(i=1,\cdots,5)$ 为待定系数. 将(3)式中各节点上 $u$ 的值在节点$(jh, n\tau)$处作 Taylor 展开，整理可得

$$(c_1+c_2)a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_1-c_2)a^2\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{3}(c_1+c_2)ah^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{6}(c_1+c_2)a^3\tau^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{1}{6}(c_1-c_2)a^2h^2\tau\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} =$$
$$(c_3+c_4+c_5)a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12}(c_3+c_4+c_5)ah^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (c_3-c_5)a^2\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} +$$
$$\frac{1}{2}(c_3+c_5)a^3\tau^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{1}{12}(c_3-c_5)a^2h^2\tau\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\tau^3 + h^4)$$

为使格式(3)的截断误差达到 $O(\tau^3 + h^4)$，须满足下面方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_3 + c_4 + c_5 = 1 \\ \frac{1}{2}(c_1-c_2)a^2\tau + \frac{1}{3}ah^2 = \frac{1}{12}ah^2 + (c_3-c_5)a^2\tau \\ \frac{1}{6}a^3\tau^2 + \frac{1}{6}(c_1-c_2)a^2h^2\tau = \frac{1}{2}(c_3+c_5)a^3\tau^2 + \frac{1}{12}(c_3-c_5)a^2h^2\tau \end{cases} \tag{4}$$

在方程组(4)中，$r = \frac{a\tau}{h^2}$，令 $c_5 = \theta$，可解得

$$c_1 = \frac{20r^2 - 12r - 48r^2\theta - 1}{12r(2r-1)} \qquad c_2 = \frac{48r^2\theta + 4r^2 + 1}{12r(2r-1)}$$

$$c_3 = \frac{2r^2 - 3r\theta - 6r^2\theta - 1}{3r(2r-1)} \qquad c_4 = \frac{6r\theta - 3r + 4r^2 + 1}{3r(2r-1)}$$

将所得各值代入(3)式，可得截断误差为 $O(\tau^3 + h^4)$ 的一族含参数的隐式格式

$$\begin{aligned}&(72r^3\theta - 12r^2\theta + 20r^2 - 24r^3 - 1)(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (20r^2 - 120r^2\theta - 144r^3\theta - 36r + 48r^3 - 1)u_j^{n+1} = \\ &(48r^3 - 20r^2 - 24r^2\theta - 2)(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (88r^2 - 240r^2\theta - 36r - 96r^3 - 2)u_j^n + \\ &(12r^2\theta + 72r^3\theta + 4r^2 + 1)(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + (120r^2\theta - 144r^3\theta + 4r^2 + 1)u_j^{n-1}\end{aligned} \tag{5}$$

## 2 稳定性和收敛性

利用 Fourier 分析法，可算出格式(5)的传播矩阵为

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$g_{11} = \frac{48r^2 - 288r^2\theta - 36r - 6 + (96r^2\theta + 80r^2 - 192r^3 + 8)s}{60r^2 - 144r^2\theta - 36r - 3 + (48r^2\theta - 288r^3\theta - 80r^2 + 96r^3 + 4)s}$$

$$g_{12} = \frac{144r^2\theta + 12r^2 + 3 + (-48r^2\theta - 288r^3\theta - 16r^2 - 4)s}{60r^2 - 144r^2\theta - 36r - 3 + (48r^2\theta - 288r^3\theta - 80r^2 + 96r^3 + 4)s}$$

$$g_{21} = 1,\ g_{22} = 0,\ s = \sin^2\frac{kh}{2} \in [0,\ 1]$$

传播矩阵 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - g_{11}\lambda - g_{12} = 0 \tag{6}$$

**引理 1**[10] 特征方程(6)的根满足 $|\lambda_{1,2}| \leqslant 1$ 的充要条件是

$$|g_{11}| \leqslant 1 - g_{12} \leqslant 2 \tag{7}$$

**引理 2**[10] 差分格式(5)稳定，即矩阵族 $\boldsymbol{G}^n(s)(s \in [0,\ 1],\ n = 1,2,\cdots)$ 一致有界的充要条件是

1) $|\lambda_{1,2}| \leqslant 1$($\lambda_{1,2}$ 是方程(6)的两个根)

2) 使 $1 - \frac{g_{11}^2}{4} = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 成立的 $s$ 或不存在，或不属于区间[0，1].

首先考虑条件(2)，当 $g_{12} \neq -1$ 时，使 $1 - \frac{g_{11}^2}{4} = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 的 $s$ 不存在. 再由条件(1)和式(7)知，格式(5)稳定的条件为 $-1 + g_{12} \leqslant g_{11} \leqslant 1 - g_{12} < 2$.

由 $g_{11} \leqslant 1 - g_{12}$ 得

$$\frac{60r^2 - 144r^2\theta - 36r - 3 + (48r^2\theta + 64r^2 - 192r^3 - 288r^3\theta + 4)s}{60r^2 - 144r^2\theta - 36r - 3 + (48r^2\theta - 288r^3\theta - 80r^2 + 96r^3 + 4)s} \leqslant 1 \tag{8}$$

为确定起见，不妨假定

$$60r^2 - 144r^2\theta - 36r - 3 + (48r^2\theta - 288r^3\theta - 80r^2 + 96r^3 + 4)s < 0 \tag{9}$$

该式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} 60r^2 - 144r^2\theta - 36r - 3 < 0 & (10) \\ -20r^2 - 96r^2\theta - 36r + 1 - 288r^3\theta + 96r^3 < 0 & (11) \end{cases}$$

由(10)式解得

$$\theta > \frac{20r^2 - 12r - 1}{48r^2} \tag{12}$$

由(11)式解得

$$\theta > \frac{96r^3 - 20r^2 - 36r + 1}{96r^2(3r+1)} \tag{13}$$

而$\frac{20r^2 - 12r - 1}{48r^2} < \frac{96r^3 - 20r^2 - 36r + 1}{96r^2(3r+1)}$，故(13)式优于(12)式，(13)式成立时(12)式也成立.

而当(9)式成立时，由(8)式解得

$$-144r^2(2r-1)s \geqslant 0$$

该式成立的条件为

$$r \leqslant \frac{1}{2}$$

又由 $1 - g_{12} < 2$ 可得

$$72r^2 - 36r + (-96r^2 + 96r^3 - 576r^3\theta)s < 0$$

该式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} 72r^2 - 36r < 0 & (14) \\ -24r^2 + 96r^3 - 576r^3\theta - 36r < 0 & (15) \end{cases}$$

当 $r < \frac{1}{2}$ 时(14)式成立.

由(15)式解得

$$\theta > \frac{8r^2 - 2r - 3}{48r^2} \tag{16}$$

而当 $r < \frac{1}{2}$ 时，$\frac{96r^3 - 20r^2 - 36r + 1}{96r^2(3r+1)} > \frac{8r^2 - 2r - 3}{48r^2}$ 成立，故(13)式优于(16)式，(13)式成立时(16)式也成立.

再由 $-1 + g_{12} \leqslant g_{11}$ 得

$$72r + 576r^2\theta - 96r^2 + 12 + (96r^3 - 192r^2\theta - 16r^2 - 16)s \geqslant 0 \tag{17}$$

(17)式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} 72r + 576r^2\theta - 96r^2 + 12 \geqslant 0 & (18) \\ 96r^3 + 384r^2\theta - 112r^2 + 72r - 4 \geqslant 0 & (19) \end{cases}$$

由(18)式解得

$$\theta \geqslant \frac{8r^2 - 6r - 1}{48r^2} \tag{20}$$

由(19)式解得

$$\theta \geqslant \frac{-24r^3 + 28r^2 - 18r + 1}{96r^2} \tag{21}$$

而当 $r < \frac{1}{2}$ 时，$\frac{8r^2 - 6r - 1}{48r^2} < \frac{-24r^3 + 28r^2 - 18r + 1}{96r^2}$ 且 $\frac{96r^3 - 20r^2 - 36r + 1}{96r^2(3r+1)} < \frac{-24r^3 + 28r^2 - 18r + 1}{96r^2}$ 成立，故(21)式优于(20)式与(13)式，(21)式成立时(20)式和(13)式都成立.

综上所述，并根据 Lax 的稳定性与收敛性等价定理可得：

**定理 1**　当 $0 < r < \frac{1}{2}$ 且 $\theta \geqslant \frac{-24r^3 + 28r^2 - 18r + 1}{96r^2}$ 时，差分格式(5)稳定且收敛.

特别地，当 $\theta = \frac{-24r^3 + 28r^2 - 18r + 1}{96r^2}$ 时，差分格式(5)可化为

$$\left(-18r^4+3r^2+3r-\frac{9}{8}\right)(u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})+\left(36r^4+36r^3+12r^2-15r-\frac{9}{4}\right)u_j^{n+1}=$$
$$\left(54r^3-27r^2+\frac{9}{2}r-\frac{9}{4}\right)(u_{j+1}^{n}+u_{j-1}^{n})+\left(-36r^3+18r^2+9r-\frac{9}{2}\right)u_j^{n}+$$
$$\left(-18r^4+18r^3-6r^2-\frac{3}{2}r+\frac{9}{8}\right)(u_{j+1}^{n-1}+u_{j-1}^{n-1})+\left(36r^4-72r^3+66r^2-24r+\frac{9}{4}\right)u_j^{n-1} \tag{22}$$

## 3　数值例子

考虑扩散方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ t>0\\ u(x,\ 0)=\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=\mathrm{e}^{-t}\sin 1,\ t\geqslant 0\end{cases} \tag{23}$$

取 $M=20$，$h=\dfrac{1}{20}$，$x_j=jh(j=0,1,\cdots,M)$，$t_n=n\tau(n=0,1,\cdots)$，$r=\dfrac{\tau}{h^2}$ 为网格比. 当 $r$ 分别取 $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{4}$ 和 $\dfrac{1}{3}$ 时，先利用 C－N 格式计算第一层的值 $u_j^1$. 按格式(22) 计算到 $n=400$ 时的解与式(23) 的精确解 $u(x,\ t)=\mathrm{e}^{-t}\sin x$ 进行比较，结果如表 1.

**表 1　格式(22)数值解与精确解的比较**

| $r$ | 项目 | $x=0.1$ | $x=0.3$ | $x=0.5$ | $x=0.7$ | $x=0.9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{6}$ | 精确解 | 0.084507162 | 0.250152454 | 0.405824956 | 0.545318499 | 0.663071913 |
| | 差分解 | 0.084507168 | 0.250152469 | 0.405824976 | 0.545318516 | 0.663071920 |
| $\frac{1}{5}$ | 精确解 | 0.081736688 | 0.241951481 | 0.392520432 | 0.527440832 | 0.641333830 |
| | 差分解 | 0.081736693 | 0.241951494 | 0.392520449 | 0.527440847 | 0.641333837 |
| $\frac{1}{4}$ | 精确解 | 0.077750343 | 0.230151368 | 0.373376984 | 0.501717239 | 0.610055610 |
| | 差分解 | 0.077750347 | 0.230151379 | 0.373376999 | 0.501717251 | 0.610055616 |
| $\frac{1}{3}$ | 精确解 | 0.071533768 | 0.211749480 | 0.343523409 | 0.461602143 | 0.561278257 |
| | 差分解 | 0.071533771 | 0.211749489 | 0.343523420 | 0.461602153 | 0.561278261 |

由表 1 看出，差分格式的解与精确解有很好的吻合，这与理论分析完全一致.

**参考文献：**

[1]　陆金甫，关　治. 偏微分方程数值解法 [M]. 北京：清华大学出版社，2010.
[2]　戴嘉尊，邱建贤. 微分方程数值解法 [M]. 南京：东南大学出版社，2008.
[3]　马明书，王肖凤. 解抛物型方程的分支稳定的高精度显式差分格式 [J]. 数学季刊，2000，15(4)：98-103.
[4]　MA M S，Wang X F. A-High-Order Accuracy Implicit Difference Scheme for Solving the Equation of Parabolic Type [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2000，15(2)：94-97.
[5]　徐金平，单双荣. 解抛物型方程的一个高精度显式差分格式 [J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2009，30(4)：473-475.
[6]　马明书. 解抛物型方程的一个高精度两层显格式 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，1996，24(1)：80-81.
[7]　詹涌强. 求解热传导方程的一个高精度格式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(1)：18-22.
[8]　曾文平. 抛物型方程的一族双参数高精度恒稳格式 [J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2002，23(4)：327-331.
[9]　詹涌强. 解抛物型方程的一族六点隐式差分格式 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2012，36(4)：26-29.

[10] 马驷良．二阶矩阵族 $G^n(k, \Delta t)$ 一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用［J］．高等学校计算数学学报，1980，2(2)：41-54．

# On a Class of High Accuracy Implicit Difference Scheme for Solving the Heat-Conducting Equations

TAN Zhi-ming[1,2]，　LUO Sen-yue[1,2]

1．*Department of Basic Education，The Open University of Guangdong，Guangzhou 510091，China*；

2．*Department of Basic Education，Guangdong polytechnic Institute，Zhongshan Guangdong 528458，China*

**Abstract**：A class of implicit difference schemes with high accuracy for solving one-dimension parabolic type equation has been presented in this paper by the method of undetermined parameters. The truncation error of the schemes are $O(\tau^3 + h^4)$. By Fourier method，the difference schemes are proved to be stable if $r < \frac{1}{2}$. The numerical experiment shows the numerical solutions of difference schemes and the precise solutions are matched and the difference schemes are effective.

**Key words**：one-dimension parabolic equation；implicit difference schemes；truncation error

责任编辑　张　枸