DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.11.004

基于二次有限元离散的瀑布型多重网格法及其收敛性[①]

沈红燕，　李　明

红河学院 数学学院，云南 蒙自 661199

摘要：通过使用二次有限元的节点信息构造二次插值算子为相邻细网格提供迭代初始值，提出了基于二次有限元离散的瀑布型多重网格法，从理论上分析了该算法的收敛性，给出数值算例验证了改进算法的有效性.

关　键　词：二次有限元；二次插值；瀑布型多重网格法；收敛性

中图分类号：**O241**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2019)11－0024－05

高次有限元法对偏微分方程(PDE)问题的逼近较好，已得到广泛应用. 多重网格(MG)法[1-9]是求解以偏微分方程为背景的离散化方程的有效数值算法之一. 为进一步讨论求解二次有限元方程的瀑布型多重网格法，本文使用二次插值作为插值算子，针对二次有限元方程，提出了改进的瀑布型多重网格法(SECMG)，讨论了该算法的收敛性. 数值实验表明，改进算法具有较好的计算效果. 本文的思想和算法可推广到其他高次元.

1　模型问题

考虑带 Dirichlet 边界条件的二维椭圆型偏微分方程：

$$-\nabla\cdot(\alpha(x,y)\nabla u(x,y))+\beta(x,y)u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega \tag{1}$$

其中 $\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$，$f(x,y)$ 为给定的函数且满足 $\forall(x_0,y_0)\in\Omega$，$\alpha(x_0,y_0)>0$，$\beta(x_0,y_0)\geqslant 0$. 如果 $\alpha(x,y)\equiv 1$，$\beta(x,y)\equiv 0$，模型(1)为泊松方程；如果 $\alpha(x,y)\equiv 1$，$\beta(x,y)\equiv f(x,y)\equiv 0$，模型(1)为拉普拉斯方程.

使用一致网格剖分 Ω，可得不同步长 $h_j=\frac{h_M}{2^{M-j}}(j=1,2,\cdots,M)$ 下的一系列离散化网格 Ω_j，易知 Ω_1，Ω_M 分别为最细、最粗网格层. 使用二次有限元在网格 Ω_j 上离散模型问题(1)，可得对应的离散化方程组

$$\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{F}_j,\ j=1,2,\cdots,M \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{A}_j$ 为对称正定稀疏矩阵，$\boldsymbol{F}_j$ 为右端列向量，$\boldsymbol{u}_j$ 为未知解向量.

---

① 收稿日期：2017－09－19
基金项目：国家重点研发计划项目(2017YFB0701700，2017YFB0305601)；云南省科技厅项目(2017FH001-012，2017FH001-015)；云南省大学生创新创业训练计划项目(DCXM163005)；红河学院大学生创新创业训练计划项目(DCXL151006)；红河学院中青年学术带头人后备人才项目(2015HB0304).
作者简介：沈红燕(1995－)，女，主要从事偏微分方程数值解的研究.
通信作者：李　明，副教授.

2　改进的瀑布型多重网格法

文献[6]提出，在线性有限元离散网格中，将相邻的几个单元组合成一个大单元，进而构造一个二次插值算子，用于给相邻细层提供一个好的初始值，能在一定程度上加快瀑布型多重网格法的收敛速度．借鉴文献[6]的思想，直接使用每个二次三角形单元的 6 个节点（3 个顶点、3 个中点）的信息，无需合并相邻单元，即可构造网格 Ω_j 上的基于每个单元的二次插值算子 Ψ_j^2，且满足

1） $\| \boldsymbol{v} - \Psi_j^2 \boldsymbol{v} \| \leqslant C h_j^{r-l+1} \| \boldsymbol{v} \|_{r+1}$，$1 \leqslant r \leqslant 2$，$\boldsymbol{v} \in H^{r+1}(\Omega)$，$l = 0, 1$.

2） $\| \boldsymbol{v} - \Psi_j^2 \boldsymbol{v} \|_l \leqslant c \| \boldsymbol{v} \|_l$，$\boldsymbol{v} \in V_j$，$l = 0, 1$，$j = 1, 2, \cdots, M$.

类似于文献[6]的思路，使用二次插值算子 Ψ_j^2 为相邻细层网格提供初始值，可构造求解方程组（2）的瀑布型多重网格法（SECMG）．

算法 1　瀑布型多重网格法（SECMG）

步骤 1　精确求解最粗网格层方程 $\boldsymbol{A}_M \boldsymbol{u}_M = \boldsymbol{F}_M$，得 $\boldsymbol{u}_M^*$；

步骤 2　对 $j = M-1, \cdots, 2, 1$

（a）插值得到第 j 层的初始值 $\boldsymbol{u}_j^0 := \Psi_{j+1}^2 \boldsymbol{u}_{j+1}^*$；

（b）对 $\boldsymbol{u}_j^0$ 使用 CG（共轭迭代法）磨光 m_j 次，$\boldsymbol{u}_j^{m_j} := CG(\boldsymbol{u}_j^0, m_j)$；

（c）令 $\boldsymbol{u}_j^* := \boldsymbol{u}_j^{m_j}$.

其中 m_j 表示第 j 层网格上的磨光步数[2].

3　收敛性分析

在讨论算法 1 的收敛性之前，先引入如下引理.

引理 1[10]　对任意 $\boldsymbol{v} \in V_j$，有

$$|||\boldsymbol{v}|||_{0,j} = \|\boldsymbol{v}\|_0, \qquad |||\boldsymbol{v}||| = |||\boldsymbol{v}|||_{1,j} = a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}},\ \|\boldsymbol{v}\|_{0,j} \leqslant C h_j |||\boldsymbol{v}|||_{1,j}$$

引理 2[6]　令 $C_j: V_j \longrightarrow V_j$ 表示在第 j 层上的迭代算子，并定义线性算子 $K_j: V_j \longrightarrow V_j$，使得

$$\boldsymbol{u}_j - C_j^{m_j} \boldsymbol{u}_j^0 = K_j^{m_j}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_j^0)$$

算子 K_j 具有如下性质：

$$|||K_j^{m_j} \boldsymbol{v}|||_{1,j} \leqslant C \frac{h_j^{-1}}{m_j^r} \|\boldsymbol{v}\|_{0,j},\ \forall \boldsymbol{v} \in V_j$$

$$|||K_j^{m_j} \boldsymbol{v}|||_{1,j} \leqslant |||\boldsymbol{v}|||_{1,j},\ \forall \boldsymbol{v} \in V_j$$

其中：m_j 表示第 j 层的迭代次数，r 是与所采用的迭代方法有关的常数．本文采用共轭梯度法（CG）迭代，对应于 $r = 1$.

引理 3[11-13]　设 $\boldsymbol{u}$ 为问题（1）的解，$\boldsymbol{u}_j$ 和 I_j 分别为 $\boldsymbol{u}$ 在第 j 层上的有限元解和有限元插值，有以下超收敛性：

$$|||\boldsymbol{u}_j - I_j \boldsymbol{u}||| \leqslant C h_j^2 \|\boldsymbol{u}\|_3$$

$$|||\Psi_j^2 \boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_j||| \leqslant C h_j^2 \|\boldsymbol{u}\|_3$$

$$\|\Psi_j^2 \boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_j\|_0 \leqslant C h_j^2 \|\boldsymbol{u}\|_3$$

引理 4[14]　设 $V_{h,2}$ 是二次三角形单纯形元所对应的有限元空间，则对任意 $f \in L^2(\Omega)$，问题（1）有唯一解 $\boldsymbol{u}_h$，并且 $\lim\limits_{h \to 0} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{1,\Omega} = 0$．当 $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$ 时，有

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{1,\Omega} \leqslant h^2 |\boldsymbol{u}|_{3,\Omega}$$

引理 5　在引理 4 的条件上，有

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega} \leqslant h^2 \|\boldsymbol{u}\|_{3,\Omega}$$

证　由 $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_0 \leqslant \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_1$，$|\boldsymbol{u}|_3 \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_3$，结合引理 4 即可证得 $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega} \leqslant h^2 \|\boldsymbol{u}\|_{3,\Omega}$.

证毕.

在上述引理的基础上，给出如下定理及证明过程.

定理 1 若 $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$，对算法 1 有

$$|||\, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_1^* \,||| \leqslant Ch_1 \| \boldsymbol{u} \|_3$$

证

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_1^* \| &= \| K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_1^0) \| = \| K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_1 - I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2^*) \| = \\ & \| K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_1 - I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_2^*)) \| \leqslant \\ & \| K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_1 - I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2) \| + \| K_1^{m_1} I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^*) \| \leqslant \\ & \| K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_1 - I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2) \| + \| K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^*) \| + \| K_1^{m_1} I_1 (I - \boldsymbol{\Psi}_2^2)(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^*) \| \end{aligned} \tag{3}$$

下面对(3)式展开讨论.

$$\begin{aligned} & |||\, K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_1 - I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2) \,||| \leqslant C \frac{h_1^{-1}}{m_1} \| \boldsymbol{u}_1 - I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2 \|_0 \leqslant \\ & C \frac{h_1^{-1}}{m_1} (\| \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \|_0 + \| I_1(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2) \|_0) \leqslant \\ & C \frac{h_1^{-1}}{m_1} (\| u - \boldsymbol{u}_1 \|_0 + \| u - \boldsymbol{u}_2 \|_0 + \| \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2 \|_0) \end{aligned}$$

由

$$\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2 \|_0 \leqslant Ch_1^2 \| \boldsymbol{u} \|_3$$

和引理 5 可得

$$|||\, K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_1 - I_1 \boldsymbol{\Psi}_2^2 \boldsymbol{u}_2) \,||| \leqslant C \frac{h_1}{m_1} \| \boldsymbol{u} \|_3$$

由引理 2 可得

$$|||\, K_1^{m_1}(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^*) \,||| \leqslant |||\, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^* \,|||$$

$$\begin{aligned} & |||\, K_1^{m_1} I_1 (I - \boldsymbol{\Psi}_2^2)(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^*) \,||| \leqslant C \frac{h_1^{-1}}{m_1} \| I_1 (I - \boldsymbol{\Psi}_2^2)(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^*) \|_0 \leqslant \\ & C \frac{h_1^{-1}}{m_1} \| (I - \boldsymbol{\Psi}_2^2)(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^*) \|_0 \leqslant C \frac{h_1^{-1}}{m_1} \| \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^* \|_0 \leqslant C \frac{1}{m_1} |||\, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^* \,||| \end{aligned}$$

综上可得

$$|||\, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_1^* \,||| \leqslant C \frac{h_1}{m_1} \| \boldsymbol{u} \|_3 + \left(1 + \frac{C}{m_1}\right) |||\, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^* \,|||$$

利用递归关系

$$|||\, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_2^* \,||| \leqslant C \frac{h_2}{m_2} \| \boldsymbol{u} \|_3 + \left(1 + \frac{C}{m_2}\right) |||\, \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_3^* \,|||$$

$$\cdots\cdots$$

$$|||\, \boldsymbol{u}_{M-2} - \boldsymbol{u}_{M-2}^* \,||| \leqslant C \frac{h_{M-2}}{m_{M-2}} \| \boldsymbol{u} \|_3 + \left(1 + \frac{C}{m_{M-2}}\right) |||\, \boldsymbol{u}_{M-1} - \boldsymbol{u}_{M-1}^* \,|||$$

$$|||\, \boldsymbol{u}_{M-1} - \boldsymbol{u}_{M-1}^* \,||| \leqslant C \frac{h_{M-1}}{m_{M-1}} \| \boldsymbol{u} \|_3 + \left(1 + \frac{C}{m_{M-1}}\right) |||\, \boldsymbol{u}_M - \boldsymbol{u}_M^* \,||| = C \frac{h_{M-1}}{m_{M-1}} \| u \|_3$$

可得

$$|||\, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_1^* \,||| \leqslant C \| \boldsymbol{u} \|_3 \left[\frac{h_1}{m_1} + \sum_{i=2}^{M-1} \prod_{j=1}^{i} \left(1 + \frac{C}{m_j}\right) \frac{h_i}{m_i} \right] \leqslant Ch_1 \| \boldsymbol{u} \|_3$$

证毕.

4 数值实验

为了验证本文算法的有效性，给出如下数值算例.

例 1 考虑区域 Ω：$[0, 1]\times[0, 1]$ 上的泊松方程

$$-\nabla\cdot(\nabla u(x, y)) = f(x, y)$$

其 Dirichlet 边界条件和右端源函数 $f(x, y)$ 取决于真解

$$u(x, y) = \sin(y)(1-e^{x})(1-x^{2})(1-y^{2})$$

例 2 考虑区域 Ω：$[0, 1]\times[0, 1]$ 上的带变系数椭圆型方程

$$-\nabla\cdot(\alpha(x, y)\nabla u(x, y))+\beta(x, y)u(x, y) = f(x, y)$$

其中 $\alpha(x, y) = e^{xy}+2$，$\beta(x, y) = 1$，Dirichlet 边界条件和右端源函数 $f(x, y)$ 取决于真解

$$u(x, y) = xy(1-x^{2})(1-y^{2})$$

为便于比较，记通常的瀑布型多重网格法为 CMG，其插值算子为线性插值，磨光算子为 CG 迭代. 取 $M = 2$，并约定 G 表示最细层网格规模；I 表示最细层上的磨光步数；E 表示问题真解 u 与算法求得的近似解 u_1^* 的能量范数误差 $\| u-u_1^* \|$；t 表示计算时间. 算例的数值结果见表 1,2.

表 1 CMG 和 SECMG 求解算例 1 的数值结果

G	I	CMG		SECMG	
		E	t/s	E	t/s
32 * 32	2	1.79e-02	0.03	3.52e-03	0.03
64 * 64	2	8.86e-03	0.09	8.82e-04	0.13
128 * 128	2	4.42e-03	0.47	2.21e-04	0.54
256 * 256	2	2.21e-03	13.6	5.52e-05	14.0

表 2 CMG 和 SECMG 求解算例 2 的数值结果

G	I	CMG		SECMG	
		E	t/s	E	t/s
32 * 32	2	2.31e-02	0.03	4.46e-03	0.03
64 * 64	2	1.16e-03	0.09	1.81e-04	0.12
128 * 128	2	5.78e-03	0.49	8.45e-04	0.55
256 * 256	2	2.89e-03	13.1	4.15e-05	14.4

从表 1,2 可以看出，与算法(CMG)相比，SECMG 法虽然在计算时间方面要稍多些，但在计算精度方面具有一定的优势，计算精度要高一个量级，验证了本文算法的有效性.

参考文献：

[1] BORNEMANN F A，DEUFLHARD P. The Cascadic Multigrid Method for Elliptic Problems [J]. Numerische Mathematik，1996，75(2)：135-152.

[2] 石钟慈，许学军，黄云清. 经济的瀑布型多重网格法(ECMG) [J]. 中国科学(A 辑)，2007，37(9)：1083-1098.

[3] SHI Z C，XU X J. Cascadic Multigrid Method for Elliptic Problems [J]. East-West Journal of Numerical Mathematics，1999，7(3)：199-209.

[4] 石钟慈，许学军. Cascadic Multigrid for Parabolic Problems [J]. 计算数学(英文版)，2000，18(5)：551-560.

[5] 石钟慈，许学军. 一类新的瀑布型多重网格法 [J]. 中国科学(A 辑)，2000，30(9)：799-807.

[6] 李郴良，陈传淼，许学军. 基于超收敛和外推方法的一类新的瀑布型多重网格方法 [J]. 计算数学，2007，29(4)：439-448.

[7] CHEN C M，HU H L. Extrapolation Cascadic Multigrid Method on Piecewise Uniform Grid [J]. Science China Mathematics，2013，56(12)：2711-2722.

[8] CHEN C M，HU H L，XIE Z Q，et al. Analysis of Extraplolation Cascadic Multigrid Method (EXCMG) [J]. Science in China，2008，51(8)：1349-1360.

[9] LI M，LI C L，CUI X Z，et al. Cascadic Multigrid Methods Combined with Sixth Order Compact Scheme for Poisson Equation [J]. Numerical Algorithms，2016，71(4)：715-727.

[10] 王烈衡，许学军. 有限元方法的数学基础 [M]. 北京：科学出版社，2004.
[11] BANK R，XU J C. Asymptotically Exact A Posteriori Error Estimators，Part I：Grids with Super Convergence [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，2003，41(6)：2294-2312.
[12] 陈传淼，黄云清. 有限元高精度理论 [M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1995
[13] XU J，ZHANG Z. Analysis of Recovery Type A Posteriori Error Estimators for Mildly Structured Grids [J]. Mathematics of Computation，2004，73：1139-1152.
[14] 石钟慈，王 鸣. 有限元方法 [M]. 北京：科学出版社，2010.
[15] 李 明，赵金娥. 二维椭圆问题的经济外推瀑布多重网格法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(7)：68-72.
[16] 李 明，崔向照，赵金娥. 求解高次有限元方程的外推瀑布型多重网格法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(1)：20-23.
[17] WANG B，MENG F，FANG Y. Efficient Implementation of RKN-type Fourier Collocation Methods for Second-Order Differential Equations [J]. Applied Numerical Mathematics，2017，119：164-178.

Convergence Analysis of a Cascadic Multigrid Algorithm Combined with Quadratic Finite Element Method

SHEN Hong-yan， LI Ming

Department of Mathematics，Honghe University，Mengzi Yunnan 661100，China

Abstract：A new cascadic multigrid (SECMG) algorithm combined with quadratic finite element method has been proposed，in which a quadratic interpolation operator has been constructed by means of the nodes information of quadratic finite element cell，to provide an initial guess of iterative solution on the next fine grid. The convergence of the developed algorithm has been analyzed. Numerical results have been presented to verify the feasibility of this new method.

Key words：quadratic finite element；quadratic interpolation；cascadic multigrid algorithm；convergence analysis

责任编辑 张 枸