DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.12.001

2-Sylow 子群的阶及元素最高阶和次高阶与 A_8 相同的有限群[①]

吴 莲, 于宝娟, 陈贵云

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 讨论了群的2-Sylow子群的阶及元素的最高阶和次高阶与 A_8 相同的有限群. 利用群的素图及外自同构群、幂零群的若干性质,得出结论:若群 G 的2-Sylow子群的阶及元素的最高阶和次高阶与 A_8 相同,则存在 $H \trianglelefteq G$,使得下列结论之一成立:(i) $G/H \cong A_8$,$|G| = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7$,其中 H 为 $3^{\alpha-2}$ 阶且方指数整除 3 的幂零群,或 $5^{\beta-1}$ 阶初等 Abel 群,或 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶且方指数整除 15 的幂零群;(ii) $G/H \cong L_3(4)$,$|G| = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7$,其中 H 为 $3^{\beta-2}$ 阶且方指数整除 3 的幂零群,或 $5^{\beta-1}$ 阶初等 Abel 群,或 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶且方指数整除 15 的幂零群. 由此得到推论:若 $|G| = |A_8|$,$K_i(G) = K_i(A_8)(i = 1,2)$,则 $G \cong A_8$.

关 键 词: 2-Sylow 子群;元素;阶;群结构

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2019)12-0001-05

在对有限群的结构进行研究时,用元素的阶、子群的阶、群的阶得出了若干漂亮的群论性质,如Sylow定理、柯西定理等. 20 世纪 80 年代,施武杰教授提出用元素的集合及群的阶刻画单群的猜想:

设 G 是有限群,M 是有限单群,则 $G \cong M$ 当且仅当 $|G| = |M|$ 且 $\pi_e(G) = \pi_e(M)$.

该猜想提出后,众多群论学者对此进行了研究,这方面的成果可参见文献[1]. 文献[2] 在此基础上最终证明了该猜想完全成立. 在该猜想的研究中,施武杰教授等研究者还发现,很多单群可以只用 $\pi_e(G)$ 刻画. 在该猜想得到证明后,一些学者开始关注减少一些考虑因素作为条件是否仍然可以刻画单群. 如:只用群的阶和元素的最高阶来刻画单群,可得到很多单群的刻画[3-5]. 在类似的研究中都把群的阶作为必须的已知条件,那么可否用别的数量代替群的阶呢? 文献[6-7] 曾将群的阶换成 2-Sylow 子群的阶来讨论群的结构,遗憾的是,这并不能得到群的刻画,但此研究仍具有理论意义. 本文继续此研究,讨论 2-Sylow 子群的阶、元素的最高阶、元素的次高阶与 A_8 相同的有限群的结构.

为了讨论方便,对本文出现的一些符号加以说明. $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素的阶的集合,$K_1(G)$ 表示群 G 的最高阶元素的阶,$K_2(G)$ 表示群 G 的次高阶元素的阶,$\mathrm{Aut}(G)$ 表示群 G 的自同构群,$\mathrm{Out}(G)$ 表示群 G 的外自同构群.

定义 1 设 G 是有限群,其中 $H \trianglelefteq G$,$H \cap K = 1$ 且 $G = H \rtimes K$,若 K 的非单位元无不动点地正规作用在 H 上,则称群 G 为 Frobenius 群,H 为 Frobenius 核(简称 F-核),K 为 Frobenius 补(简称 F-补).

定义 2 如果群 G 有正规群列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$,使得 G/H 和 K 分别是以 K/H 和 H 为 Frobenius 补的

① 收稿日期:2019-03-31
基金项目:国家自然科学基金项目(11671324).
作者简介:吴 莲(1993-),女,硕士研究生,主要从事群论的研究.
通信作者:陈贵云,教授.

Frobenius 群，则称群 G 为 2 - Frobenius 群.

定义 3 设 G 是有限群，群 G 的素图 $\Gamma(G)$ 定义如下：顶点集为 $\pi(G)$，两个不同素数 p, q 有边相连当且仅当 G 有一个 pq 阶元素. 用 $t(G)$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支数. $\{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{t(G)}\}$ 为 $\Gamma(G)$ 的连通分支所含顶点之集. 若 $2 \in \pi(G)$，我们总假设 $2 \in \pi_1$.

引理 1[8] 设 G 是有限群，G 的素图不连通，则下列结论之一成立：

(i) G 是 Frobenius 群；

(ii) G 是 2-Frobenius 群；

(iii) G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 -群，K/H 为非 Abel 单群，其中 $2 \in \pi_1$ -群，H 为幂零群，且 $\mid G/K \mid \Big| \mid \mathrm{Out}(K/H) \mid$.

引理 2[9] 设有限群 $G = HN$ 是以 N 为核，H 为补的 Frobenius 群，则 H 的任一 Sylow 子群为循环群或广义四元数群.

引理 3[10] 设 G 是偶数阶 2-Frobenius 群，即 $G = ABC$，其中 $A \trianglelefteq G$，$AB \trianglelefteq G$，AB 是以 A 为核，B 为补的 Frobenius 群，BC 是以 B 为核，C 为补的 Frobenius 群，则

$$t(G) = 2 \qquad \pi(A) \cup \pi(C) = \pi_1 \qquad \pi(B) = \pi_2$$

且 G 是可解的，B 是 G 的 Hall 子群且为奇数阶的，C 为循环群.

引理 4[11] 设 a 是有限群 G 的 2 阶无不动点的自同构，那么对所有 $x \in G$，有 $x^a = x^{-1}$. 特别地，G 是 Abel 群.

定理 1 设 G 是有限群，$K_1(G) = 15$，$K_2(G) = 7$，且 G 的 2-Sylow 子群的阶为 2^6，则存在 $H \trianglelefteq G$，使得下列结论之一成立：

(i) $G/H \cong A_8$，$\mid G \mid = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7$，其中 H 为 $3^{\alpha-2}$ 阶且方指数整除 3 的幂零群，或 $5^{\beta-1}$ 阶初等 Abel 群，或 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\alpha-1}$ 阶且方指数整除 15 的幂零群；

(ii) $G/H \cong L_3(4)$，$\mid G \mid = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7$，其中 H 为 $3^{\beta-2}$ 阶且方指数整除 3 的幂零群，或 $5^{\beta-1}$ 阶初等 Abel 群，或 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶且方指数整除 15 的幂零群.

证 由条件可设

$$\mid G \mid = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \geqslant 1$$

因为

$$K_1(G) = 15 \qquad K_2(G) = 7$$

所以 7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，故 $t(G) \geqslant 2$，即 G 的素图不连通. 由引理 1 知 G 是 Frobenius 群；或 2-Frobenius 群；或 G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 -群，K/H 是非 Abel 单群，其中 $2 \in \pi_1$ -群，H 为幂零群，且 $\mid G/K \mid \Big| \mid \mathrm{Out}(K/H) \mid$. 下面分情形讨论：

情形 1 设 G 是 Frobenius 群.

易知 $G = HK$，其中 H 为 Frobenius 补，K 为 Frobenius 核. 由引理 2 知，H 的任一 Sylow 子群为循环群或广义四元数群. 由 7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，从而

$$\pi(H) = \{7\} \qquad \pi(K) = \{2, 3, 5\}$$

或

$$\pi(H) = \{2, 3, 5\} \qquad \pi(K) = \{7\}$$

若 $\pi(H) = \{7\}$，则 $\pi(K) = \{2, 3, 5\}$. 因为 K 是 Frobenius 核，所以 K 是幂零群，因此 $K = P_2 \times P_3 \times P_5$，从而 K 有 30 阶元，与 $K_1(G) = 15$ 矛盾.

若 $\pi(K) = \{7\}$，则 $\pi(H) = \{2, 3, 5\}$. 由引理 2 知 H 的 2-Sylow 子群 H_2 为循环群或广义四元数群，则 H_2 中恒有 8 阶元，与 $K_2(G) = 7$ 矛盾.

因此 G 不是 Frobenius 群.

情形 2　设 G 是 2-Frobenius 群. 由引理 3 知 $G=ABC$，其中 $A\trianglelefteq G$，$AB\trianglelefteq G$，AB 是以 A 为核，B 为补的 Frobenius 群，BC 是以 B 为核，C 为补的 Frobenius 群. 则

$$t(G)=2 \qquad \pi(A)\cup\pi(C)=\pi_1 \qquad \pi(B)=\pi_2$$

且 G 是可解的，B 是 G 的 Hall 子群且为奇数阶的，C 是循环群. 由 7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点知 $\pi(B)=\{7\}$，又因为 B 为 AB 的 Frobenius 补，由引理 2 知 B 是循环群，从而 $|B|=7$. 再由 BC 是以 B 为核，C 为补的 Frobenius 群，故 $|C|\,\big|\,(|B|-1)$，即 $|C|\,\big|\,6$，因此由

$$|G|=2^6\cdot 3^\alpha\cdot 5^\beta\cdot 7 \qquad |B|=7$$

可得 $\{2,5\}\subseteq\pi_e(A)$. 再由 A 为 AB 的 Frobenius 核知 A 是幂零群，从而 A 中存在 10 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾.

因此 G 不是 2-Frobenius 群.

情形 3　设 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 K/H 为非 Abel 单群.

由文献[12-13]，比较阶知 K/H 同构于下列单群之一：

$L_2(7)(2^3\cdot 3\cdot 7)$，$L_2(8)(2^3\cdot 3^2\cdot 7)$，$U_3(3)(2^5\cdot 3^3\cdot 7)$，$A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$，$A_8(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$，$L_3(4)(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$，$L_2(49)(2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2)$，$U_3(5)(2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7)$，$A_9(2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)$.

情形 3.1　设 $K/H\cong L_2(7)(2^3\cdot 3\cdot 7)$，由文献[14]知

$$|\mathrm{Out}(K/H)|=|\mathrm{Out}(L_2(7))|=2$$

由引理 1 知 $|G/K|\,\big|\,2$，比较阶得 $(2^2\cdot 5)\,\big|\,|H|$. 由于 H 幂零，因此 H 有 10 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾. 因此 $K/H\ncong L_2(7)$.

情形 3.2　设 $K/H\cong L_2(8)(2^3\cdot 3^2\cdot 7)$，由文献[14]知

$$|\mathrm{Out}(K/H)|=|\mathrm{Out}(L_2(8))|=3$$

由引理 1 知 $|G/K|\,\big|\,3$，此时恒有 $(2^3\cdot 5)\,\big|\,|H|$. 而 H 是幂零群，因此 H 有 10 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾. 因此 $K/H\ncong L_2(8)$.

情形 3.3　设 $K/H\cong U_3(3)(2^5\cdot 3^3\cdot 7)$，由文献[14]知

$$|\mathrm{Out}(K/H)|=|\mathrm{Out}(U_3(3))|=2$$

由引理 1 知 $|G/K|\,\big|\,2$.

(a) 若 $|G/K|=1$，则 $G/H\cong U_3(3)$. 由

$$|U_3(3)|=2^5\cdot 3^3\cdot 7 \qquad |G|=2^6\cdot 3^\alpha\cdot 5^\beta\cdot 7^\gamma$$

知

$$|H|=2\cdot 3^{\alpha-3}\cdot 5^\beta\cdot 7^{\gamma-1} \qquad \alpha,\beta,\gamma\geqslant 1$$

从而 $10\,\big|\,|H|$. 再由 H 是幂零群，故 H 有 10 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾.

(b) 若 $|G/K|=2$，则 $G/H\cong U_3(3).2$. 由文献[14]知 $U_3(3).2$ 中有 12 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾. 因此 $K/H\ncong U_3(3)$.

情形 3.4　设 $K/H\cong A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$. 由文献[14]知

$$|\mathrm{Out}(K/H)|=|\mathrm{Out}(A_7)|=2$$

由引理 1 知 $|G/K|\,\big|\,2$.

(a) 若 $|G/K|=1$，则 $G/H\cong A_7$. 比较阶得

$$|H|=2^3\cdot 3^{\alpha-2}\cdot 5^{\beta-1}\cdot 7^{\gamma-1} \qquad \alpha,\beta,\gamma\geqslant 1$$

因此 H 的 2-Sylow 子群 H_2 是 8 阶群，故 $5\nmid|\mathrm{Aut}(H_2)|$，于是 G 的 5 阶元在 H_2 上的作用是平凡作用. 这说明 G 有 10 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾.

(b) 若 $|G/K|=2$，则 $G/H\cong A_7.2$. 比较阶得

$$|H| = 2^2 \cdot 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1} \cdot 7^{\gamma-1} \qquad \alpha,\beta,\gamma \geqslant 1$$

因为 H 是幂零群，所以 G 中的 5 阶元可以共轭作用于 H_2(H 的 2-Sylow 子群). 但 H_2 是 4 阶群，故 G 的 5 阶元在 H_2 上的作用是平凡作用. 因此 G 有 10 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾. 因此 $K/H \ncong A_7$.

情形 3.5 设 $K/H \cong A_8(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$. 由文献[14]知

$$|\mathrm{Out}(K/H)| = |\mathrm{Out}(A_8)| = 2$$

由引理 1 知 $|G/K| \,\big|\, 2$，比较 2-Sylow 子群的阶得 $|G/K|=1$，即 $G/H \cong A_8$. 因此

$$|H| = 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1} \cdot 7^{\gamma-1} \qquad \alpha,\beta,\gamma \geqslant 1$$

再由 H 是 π_1 -群，7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，从而

$$\gamma = 1 \qquad |H| = 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$$

当 $\alpha=2$ 时，取 $a \in G$ 且 $|a|=2$，由 $H \trianglelefteq G$ 知 a 可以共轭作用于 H，且该作用必无不动点，若否，G 中有 10 阶元，与$K_2(G)=7$ 矛盾. 由引理 4 知 H 为 Abel 群，故 H 为 $5^{\beta-1}$ 阶初等 Abel 群. 当 $\beta=1$ 时，H 为 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群，且其方指数整除 3. 当 $\alpha \geqslant 3$，$\beta \geqslant 2$ 时，H 为 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群，且其方指数整除 15.

情形 3.6 设 $K/H \cong L_3(4)(2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$. 同理得 $|G/K| \,\big|\, 6$，比较 2-Sylow 子群的阶得 $2 \nmid |G/K|$. 即 $|G/K|=1,3$.

(a) 若 $|G/K|=1$，则 $G/H \cong L_3(4)$. 比较阶得

$$|H| = 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1} \cdot 7^{\gamma-1} \qquad \alpha,\beta,\gamma \geqslant 1$$

因 H 是π_1 -群，则 $\gamma=1$，$|H| = 3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$. 当 $\alpha=2$ 时，同理可得 H 为 $5^{\beta-1}$ 阶初等 Abel 群. 当 $\beta=1$ 时，H 为 $3^{\alpha-2}$ 阶幂零群，且其方指数整除 3. 当 $\alpha \geqslant 3$，$\beta \geqslant 2$ 时，H 为 $3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ 阶幂零群，且其方指数整除 15.

(b) 若 $|G/K|=3$，则 $G/H \cong L_3(4).3$. 由文献[14]知 $L_3(4).3$ 中有 21 阶元，与 $K_1(G)=15$ 矛盾. 因此 $G/H \ncong L_3(4).3$.

情形 3.7 设 $K/H \cong L_2(49)(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2)$. 由文献[12]中的结论知 $L_2(49)$ 有 12 阶元，与$K_2(G)=7$ 矛盾. 因此 $K/H \ncong L_2(49)$.

情形 3.8 设 $K/H \cong U_3(5)(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7)$. 由文献[14]知

$$|\mathrm{Out}(K/H)| = |\mathrm{Out}(U_3(5))| = |S_3| = 6$$

由引理 1 知 $|G/K| \,\big|\, 6$，比较阶知 H 的 2-Sylow 子群的阶等于 2 或 4，从而同理可得 G 恒有 10 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾. 因此 $K/H \ncong U_3(5)$.

情形 3.9 设 $K/H \cong A_9(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7)$. 由文献[14]知

$$|\mathrm{Out}(K/H)| = |\mathrm{Out}(A_9)| = 2$$

由引理 1 知 $|G/K| \,\big|\, 2$. 因为 $2^6 \,\big\|\, |A_9|$，所以 $|G/K|=1$，即 $G/H \cong A_9$. 再由文献[12]知 A_9 中有 12 阶元，与 $K_2(G)=7$ 矛盾. 因此 $K/H \ncong A_9$. 证毕.

定理 2 设 G 是有限群，G 的 2-Sylow 子群的阶与 A_8 的 2-Sylow 子群的阶相等，$K_i(G) = K_i(A_8)$ $(i=1,2)$. 则 G 的结构如定理 1.

推论 1 设 G 是有限群，$|G| = |A_8|$，$K_i(G) = K_i(A_8)(i=1,2)$. 则 $G \cong A_8$.

参考文献：

[1] SHI W J. The Quantitative Property of Finite Groups [J]. 徐州师范大学学报(自然科学版), 2009, 27(2): 1-15.

[2] VASILEV A V, GRECHKOSEEVA M A, MAZUROV V D. Characterization of the Finite Simple Groups by Spectrum and Order [J]. Algebra and Logic, 2009, 48(6): 385-409.

[3] 何立官, 陈贵云. 关于一些交错单群的新刻画 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(2): 46-49.

[4] 何立官, 陈贵云. 关于一些对称群的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(6): 1-3.

[5] 蒋琴会, 陈兆英, 李可峰. 单群 $PSL_2(7)$的特征性质及其初等证明 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(10):

65-67.

[6] 陈　梦，陈贵云．最高阶元的阶为 5 及 Sylow-2 子群的阶为 2,4,8 时的有限群 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：52-55.

[7] 陈　梦，刘正龙，陈贵云．最高阶元的阶为 7 及 Sylow-2 子群的阶为 8 的有限群的结构 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：22-25.

[8] WILLIAMS J S. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. Journal of Algebra，1981，69(2)：487-513.

[9] 徐明曜．有限群导引-下册 [M]．北京，科学出版社，1999.

[10] 陈贵云．Frobenius 群和 2-Frobenius 群的结构 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485-487.

[11] KURZWEIL H，STELLMACHER B. 有限群论导引 [M]．施武杰，李士恒，译．北京：科学出版社，2009.

[12] 施武杰．$2^a 3^b 5^c 7^d$ 阶单群与 Janko 单群 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，1987(4)：1-8.

[13] 施武杰．关于单 K_4 -群 [J]．科学通报，1991，36(17)：1281-1283.

[14] CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford：Clarendon Press，1985.

On Order of 2-Sylow Subgroup and the Same Largest and Second Largest Element Orders with A_8

WU　Lian，　YU Bao-juan，　CHEN Gui-yun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the structure of finite groups with the same order of 2-Sylow subgroup and the same largest and second largest element orders with A_8 has been discussed. The some properties of prime graph components of groups，outer automorphism groups and nilpotent groups are used in discussion. It is concluded that，if the finite groups G has the same order of 2-Sylow subgroup and the same largest and second largest element orders with A_8，then a group $H \trianglelefteq G$ makes that，(i) $G/H \cong A_8$，$|G|=2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7$，and H is a nilpotent group and $|H|=3^{\alpha-2}$ square index divides 3；or H is an elementary Abel group，and $|H|=5^{\beta-1}$；or H is a nilpotent group and $|H|=3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ square index divides 15；(ii) $G/H \cong L_3(4)$，$|G|=2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7$，and H is a nilpotent group and $|H|=3^{\beta-2}$ square index divides 3；or H is an elementary Abel group，and $|H|=5^{\beta-1}$；or H is a nilpotent group and $|H|=3^{\alpha-2} \cdot 5^{\beta-1}$ square index divides 15. As a corollary，it follows that if $|G|=|A_8|$，$K_i(G)=K_i(A_8)(i=1,2)$，then $G \cong A_8$.

Key words：2-Sylow subgroup；element；order；group structure

责任编辑　廖　坤