第 44 卷　第 12 期　　西南师范大学学报（自然科学版）　　2019 年 12 月
Vol. 44　No. 12　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Dec.　2019

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2019.12.002

交错群 A_5 的新刻画①

周　茹，　吕　恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 利用在不同的共轭类上取值均不相同的特征标的个数刻画了 A_5．60 阶群除了 A_5 外均可解．主要通过对所有 60 阶可解群的结构以及它们的特征标的性质进行分析，得出在各个 60 阶可解群的特征标中，满足在不同的共轭类上取值均不相同这一条件的特征标的个数均不为 2．最后分析了 A_5 的特征标性质，得出只有 A_5 是满足条件的 60 阶群．采用由特殊到一般以及一一排除的方法，证明了如果一个有限群 G，其阶为 60，并且满足在 G 的所有不可约特征标中，恰好存在两个不可约特征标，使得这两个特征标在不同的共轭类上均为不同的取值，则这个群一定同构于 A_5．

关　键　词： 有限群；特征标；共轭类

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2019)12－0006－04

在有限群的研究中，经常从不同的角度去刻画某个群，比如文献[1]就对单群 K_3 进行了刻画．在这里，我们主要关注对单群 A_5 的刻画．文献[2-7]采用了多种不同的方法来刻画 A_5．文献[2]通过 Sylow-p 子群的个数来刻画 A_5，文献[3-5]通过元素的阶来刻画 A_5，文献[6-7]分别通过不可补子群个数和状态空间图来刻画 A_5．文献[8]从不同不可约特征标在某一元素上取不同值的角度分类了可解群．本文受此启发，通过在不同共轭类上取值都不同的特征标的个数来刻画 A_5，说明了恰好存在两个不可约特征标，使得在不同的共轭类取值都不同的 60 阶群只有 A_5．为了方便，我们称特征标为 TJ 特征标当且仅当其在不同的共轭类上取值不同，称群为 TJ 群当且仅当其不可约特征标中恰好有两个特征标为 TJ 特征标．为便于本文证明，下面给出相关的引理：

引理 1[9]　$G=H\times K$，若任取 $\varphi\in\mathrm{Irr}(H)$，$\theta\in\mathrm{Irr}(K)$，则 $\varphi\times\theta$ 刚好是 G 的所有不可约特征标．其中对于 $h\in H$ 和 $k\in K$，有 $(\varphi\times\theta)(hk)=\varphi(h)\theta(k)$．

引理 2[9]　若 A 是交换群，且 $A\lhd G$，则对所有 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$，有 $\chi(1)\,\Big|\,|G:A|$．

引理 3[9]　若 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 且 $\chi(1)>1$，则存在 $g\in G$，使得 $\chi(g)=0$．

引理 4[9]　如果 $G=H\times K$，其中 H 是非交换群，$K\neq 1$，则 G 不是 TJ 群．

证　令 λ 表示 H 的线性特征标，因为 H 非交换，所以

$$\mathrm{Ker}\,\lambda\geqslant H'>1$$

所以 H 的线性特征标不是 TJ 特征标，于是 H 的线性特征标乘以 K 的不可约特征标不是 TJ 特征标．对于 H 的非线性特征标 χ，由引理 3，存在 $h\in H$，使得 $\chi(h)=0$，所以 H 的非线性特征标乘以 K 的不可约特征标也不是 TJ 特征标．于是 G 的所有不可约特征标均不是 TJ 特征标，所以 G 不是 TJ 群．

---

①　收稿日期：2019－03－21

基金项目：国家自然科学基金项目(11471266)．

作者简介：周　茹(1995－)，女，硕士研究生，主要从事群论的研究．

通信作者：吕　恒，教授．

定理 1　如果 $|G|=60$，且恰好存在两个不可约特征标 χ 和 φ，使得对任意 g_m, g_n，其中 g_m, g_n 属于不同的共轭类，且 $1\leqslant m,n\leqslant |\mathrm{Irr}(G)|$，有 $\chi(g_m)\neq\chi(g_n)$ 且 $\varphi(g_m)\neq\varphi(g_n)$. 则 $G\cong A_5$.

证　只需证明 60 阶群除了 A_5 外其它均不满足定理条件即可.

首先看一些特殊情况：

情形 1　若 G 是循环群，则显然不满足"恰好存在两个不可约特征标在不同共轭类上取值不同"这一条件.

情形 2　若 G 是交换群，则 $|G|=60=2^2\times3\times5$，于是

$$G\cong C_4\times C_3\times C_5$$

或

$$G\cong C_2\times C_2\times C_3\times C_5$$

前者 $G\cong C_{60}$ 已经讨论过. 后者对于 $H=C_2\times C_3$，一定存在 $\lambda\in\mathrm{Irr}(H)$，使得 $\mathrm{Ker}(\lambda)=1$. 又因为 C_2 和 C_5 的非主不可约特征标均为 TJ 特征标，所以由引理 1，λ 与 C_2 和 C_5 的非主不可约特征标的乘积一定是 TJ 特征标. 则 G 的 TJ 特征标的个数一定大于 2.

再看一般情况：

因为 60 阶群除了 A_5 外均可解，所以只需排除 G 可解的情况.

若 G 可解，则 G 的 Sylow－5 子群正规. 设 G 的 Sylow－5 子群为 P.

情形 3　若 $P\leqslant Z(G)$.

此时 $N_G(P)=C_G(P)=G$，于是由文献[10]可得 P 在 G 中有补，记为 H. 则可以得到

$$G=HP \qquad |H|=12$$

所以 $H\cap P=1$. 因为 $P\leqslant Z(G)$，所以 P 与 H 可换，所以 $H\lhd G$. 又因 $P\lhd G$，则 $G=H\times P$.

情形 3.1　若 $H\cong C_{12}$，则 $G\cong C_{12}\times C_5\cong C_{60}$，归为情形 1.

情形 3.2　若 $H\cong C_6\times C_2$，则 $G\cong C_6\times C_2\times C_5$ 为交换群，归为情形 2.

情形 3.3　若 $H\cong(C_2\times C_2)\rtimes C_3$，则 $G\cong H\times P$. 此时 H 为非交换群，由引理 4 知群 G 不是 TJ 群.

情形 3.4　若 $H\cong C_6\rtimes C_2$，显然与情形 3.3 用同样的方法可得群 G 不是 TJ 群.

情形 3.5　若 $H\cong C_3\rtimes C_4$，此时与情形 3.4 相同.

情形 4　若 $P\not\leqslant Z(G)$.

此时 G 非交换，$|G'|>1$，于是对于 G 的线性特征标 λ，有 $\mathrm{Ker}\,\lambda\geqslant G'$，所以 $\mathrm{Ker}\,\lambda>1$，所以线性特征标均不是 TJ 特征标. 以下只需证明非线性特征标不是 TJ 特征标即可.

因为 $P\not\leqslant Z(G)$，P 为 G 的交换正规子群，且 $(|P|,|G/P|)=1$，因此

$$P=[P,G]\times(P\cap Z(G))=[P,G]\leqslant G'$$

所以

$$(G/P)'=G'P/P=G'/P$$

而 $|G/P|=12$，所以 $|G'/P|=1,3,4$，所以 $|G'|=5,15,20$. 由文献[11]得 $G/C_G(P)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(P)$ 的子群，又因为 $P\not\leqslant Z(G)$，所以 $|G/C_G(P)|=4,2$，所以 $G/C_G(P)$ 交换且 $|C_G(P)|=15,30$. 由文献[11]得 $G'\leqslant C_G(P)$，所以

$$|G'|\leqslant|C_G(P)| \qquad |G'|\,\big|\,|C_G(P)|$$

所以 $|G'|=5,15$.

情形 4.1　若 $|G'|=5$，则 $G'=P$. 又因 G 非交换，而 G/G' 交换，所以 G 的 Hall-2,3 子群交换，所以

$$G\cong(C_5\rtimes C_2)\times C_3\times C_2$$

或者

$$G\cong(C_5\rtimes C_4)\times C_3$$

而 $C_5 \rtimes C_2$ 和 $C_5 \rtimes C_4$ 都为非交换群，由引理 4，在这两种情况下 G 均不是 TJ 群.

情形 4.2 若 $|G'| = 15$，则 $|G/G'| = 4$. 此时 G 有以下两种情况：

(a) 当 $G \cong (C_{15} \rtimes C_2) \times C_2$ 时，由引理 4 可得 G 不是 TJ 群.

(b) 当 $G \cong C_{15} \rtimes C_4$ 时，此时有以下两种情况：

(b_1) 若 $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$，其中 $a^{15} = b^4 = 1$ 且$[a, b^2] = 1$. 令 $H = \langle a, b^2 \rangle$，则 $H \lhd G$ 且 H 交换. 又因 $|H| = 30$，由引理 2，对于 G 的任一不可约特征标 χ，有 $\chi(1) \mid 2$，所以对于 G 的非线性不可约特征标 χ，有 $\chi(1) = 2$. 又因为 $|G:H| = 2$，由文献[9]得，χ_H 要么不可约，要么 $\chi_H = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i$(其中 λ_i 互不相同且不可约). 所以对于 G 的非线性不可约特征标 χ，有 $\chi_H = \lambda_1 + \lambda_2$，此时

$$I_G(\lambda_1) = I_G(\lambda_2) = H \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Irr}(H)$$

又因

$$[\chi_H, \chi_H] = 2 = |G:H|$$

所以由文献[9]得，对于 $g \in G - H$，有 $\chi(g) = 0$. 显然

$$C_G(b) = \langle b \rangle \qquad b \in G - H$$

所以 $|G:C_G(b)| = 15$，也就是说 b 的共轭类有 15 个元，于是 $G - H$ 至少有两个共轭类，在这两个共轭类上特征标的取值都为 0，所以 G 的所有非线性特征标均不是 TJ 特征标.

(b_2) 若 $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$，其中

$$a^5 = b^3 = c^4 = 1 \qquad a^c = a^2 \qquad b^c = b^{-1}$$

令 $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$，则 $|H| = 15$，且 H 交换并正规于 G. 同理可得对于 G 的任一不可约特征标 χ，有 $\chi(1) \mid 4$，于是 $\chi(1) = 2$ 或 $\chi(1) = 4$. 若 $\chi(1) = 4$，由文献[9]得 $\chi_H = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i$(其中 $\lambda_i \in \mathrm{Irr}(H)$)，于是

$$[\chi_H, \chi_H] = 4 = |G:H|$$

所以对于 $g \in G - H$，有 $\chi(g) = 0$. 又因

$$C_G(c) = \langle c \rangle \qquad c \in G - H$$

同(b_1)得，若 $\chi(1) = 4$，则不是 TJ 特征标. 若$\chi(1) = 2$，同样由文献[9]得 $\chi_H = 2\lambda$(其中 $\lambda \in \mathrm{Irr}(H)$). 于是

$$[\chi_H, \chi_H] = 4 = |G:H|$$

所以若$\chi(1) = 2$，则不是 TJ 特征标. 所以 G 的所有非线性特征标均不是 TJ 特征标.

综上所述，若 G 可解，则 G 不是 TJ 群.

而对于 A_5，显然 A_5 有 5 个共轭类，又因 A_5 为单群，所以 $|A_5 : A_5'| = 1$，于是 A_5 有 1 个线性不可约特征标和 4 个非线性不可约特征标. 线性特征标即为主特征标，显然不是 TJ 特征标. 对于非线性特征标，由文献[12]得，其中有两个特征标是由 S_5 的特征标限制得到的，所以这两个特征标在循环节为 5 的两个共轭类上取值相同，由此也均不是 TJ 特征标. 剩下的两个不可约特征标由文献[12]计算得满足“在不同共轭类取值不同”这一条件. 于是，A_5 为 TJ 群.

故定理 1 得证.

参考文献：

[1] 陈 梦，朱 华，刘正龙. K_3 单群的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(6)：1-4.

[2] KHALILI A A. A New Characterization of the Alternating Groups A_5 and A_6 [J]. New Zealand J Math，2012，42：149-155.

[3] 李 月，曹洪平. 交错群 A_5，A_6，A_7 的新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：47-50.

[4] 王华丽，周 伟，晏燕雄. 单群 A_5 的一个新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(12)：47-50.

[5] 施武杰，杨文泽. A_5 的一个新刻划与有限质元群 [J]. 西南师范学院学报(自然科学版)，1984，9(1)：36-40.

[6] 黄　宇，宋科研．用不可补子群个数刻画单群 A_5[J]．西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：90-93.

[7] 王孝敏，周　伟．用状态空间图刻画单群 A_5[J]．西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：44-46.

[8] 钱国华，朱一心．不同不可约特征标在某一元素上取不同值的可解群 [J]．数学年刊(A 辑)，2005，26(1)：1-6.

[9] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. New York：Academic Press，1976.

[10] 徐明曜．有限群导引-上册 [M]．北京：科学出版社，1999.

[11] 陈重穆．有限群论基础 [M]．重庆：重庆出版社，1983.

[12] JAMES G，LIEBECK M. Pepresentations and Characters of Groups [M]. Cambridge：Cambridge University press，1993.

A New Characterization of Alternating Group A_5

ZHOU Ru，LÜ Heng

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：The number has been used in this paper of irreducible characters whose values are differently in different conjugacy classes to characterrises A_5. The 60-order finite groups is solvable except A_5，so，by analyzing the structures and the nature of the characters of all the 60-order groups，finds that among all the solvable 60-order groups，the number of characters which satisfy the condition that their values differ in different conjugate classes is not two. Whereas unsolvable 60-order group A_5 has two characters whose values are dissimilar in different conjugate classes. It is concluded that A_5 is the only 60-order group that meets the condition. From special to general，the paper employs the elimination method proved that if a 60-order finite group has two irreducible characters which value differently in different conjugacy classes，it has to be A_5.

Key words：finite group；character；conjugacy class

责任编辑　廖　坤