DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.12.003

半群 $\mathscr{DOPD}(n, r)$的秩和相关秩[①]

李晓敏，　罗永贵，　赵　平

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：设自然数 $n\geqslant 3$，$\mathscr{DOPD}_n$ 是有限链$[n]$上的保序且保距部分一一奇异降序变换半群. 对任意的 $r(0\leqslant r\leqslant n-1)$，记 $\mathscr{DOPD}(n, r)=\{\alpha\in\mathscr{DOPD}_n: |\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$为半群 $\mathscr{DOPD}_n$ 的双边星理想. 通过对秩为 r 的元素和星格林关系的分析，获得了半群 $\mathscr{DOPD}(n, r)$的极小生成集和秩. 确定了当 $0\leqslant l\leqslant r$ 时，半群 $\mathscr{DOPD}(n, r)$关于其星理想 $\mathscr{DOPD}(n, l)$的相关秩.

关　键　词：保序；保距；保降序；部分一一奇异变换半群；秩；相关秩

中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2019)12-0010-07

设$[n]=\{1, 2, \cdots, n-1, n\}(n\geqslant 3)$并赋予自然数的大小序. $\mathscr{I}_n$ 与 $\mathscr{S}_n$ 分别表示$[n]$上的对称逆半群(即部分一一变换半群)和对称群，$\mathscr{SI}_n=\mathscr{I}_n\backslash\mathscr{S}_n$ 是$[n]$上的部分一一奇异变换半群. 设 $\alpha\in\mathscr{SI}_n$，若对任意的 $x, y\in\mathrm{Dom}(\alpha)$，$x\leqslant y$ 可推出 $x\alpha\leqslant y\alpha$，则称 α 是部分一一保序的. 记 $\mathscr{OI}_n$ 为$[n]$上的保序有限部分一一奇异变换半群. 设 $\alpha\in\mathscr{OI}_n$，若对任意的 $x, y\in\mathrm{Dom}(\alpha)$，有 $|x\alpha-y\alpha|=|x-y|$，则称 α 是保距的.

令

$$\mathscr{OPD}_n=\{\alpha\in\mathscr{OI}_n: |x\alpha-y\alpha|=|x-y|,\ \forall x, y\in\mathrm{Dom}(\alpha)\}$$

则称 $\mathscr{OPD}_n$ 为$[n]$上的保序且保距有限部分一一奇异变换半群.

令

$$\mathscr{DOPD}_n=\{\alpha\in\mathscr{OPD}_n: x\alpha\leqslant x,\ \forall x\in\mathrm{Dom}(\alpha)\}$$

则称 $\mathscr{DOPD}_n$ 为$[n]$上的保序且保距有限部分一一奇异降序变换半群.

记

$$\mathscr{DOPD}(n, r)=\{\alpha\in\mathscr{DOPD}_n: |\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r,\ 0\leqslant r\leqslant n-1\}$$

易见 $\mathscr{DOPD}(n, r)$是 $\mathscr{DOPD}_n$ 的子半群，且对任意的 $\alpha\in\mathscr{DOPD}(n, r)$，$\beta, \gamma\in\mathscr{DOPD}_n$，均有 $|\mathrm{Im}(\beta\alpha\gamma)|\leqslant r$，即 $\beta\alpha\gamma\in\mathscr{DOPD}(n, r)$，因而 $\mathscr{DOPD}(n, r)$是 $\mathscr{DOPD}_n$ 的双边星理想.

通常一个有限半群 S 的秩定义为

$$\mathrm{rank}(S)=\min\{|A|: A\subseteq S, \langle A\rangle=S\}$$

半群 S 及其子半群 V 之间的相关秩定义为

$$r(S, V)=\min\{|A|: A\subseteq S, A\cap V=\Phi, \langle A\cup V\rangle=S\}$$

易见 $r(S, S)=0$.

对于有限半群的秩及其相关秩的研究目前已有许多结果[1-12]. 文献[1]考虑了$[n]$上的保序有限部分一一奇异变换半群 $\mathscr{OI}_n$ 的理想

$$\mathscr{K}_o(n, r)=\{\alpha\in\mathscr{OI}_n: |\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r,\ 0\leqslant r\leqslant n-1\}$$

的生成集和秩，确定了半群 $\mathscr{K}_o(n, r)$的秩为 C_n^r. 文献[2]证明了半群 $\mathscr{OI}_n$ 的 m 偏度秩存在时一定等于 n. 文

① 收稿日期：2019-04-03
基金项目：贵州师范大学研究生创新基金项目(YC[2018]023).
作者简介：李晓敏(1994-)，女，硕士研究生，主要从事半群代数理论的研究.

献[3-11]考虑了几类不同的保序且压缩的变换半群的秩和相关秩．文献[12]研究了半群 $\mathscr{O}_n(k)$ 的秩．

本文在文献[1-12]的基础上继续考虑保序保距且保降序部分一一奇异变换半群 $\mathscr{DOPD}_n$ 的双边星理想 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 的秩和相关秩，证明了如下主要结果：

定理 1　设 $n \geqslant 3$，$0 \leqslant r \leqslant n-1$，则 $\mathscr{J}_r^*$ 是 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 的生成集，即 $\mathscr{DOPD}(n, r) = \langle \mathscr{J}_r^* \rangle$．

定理 2　设 $n \geqslant 3$，$0 \leqslant r \leqslant n-1$，则

$$\operatorname{rank}(\mathscr{DOPD}(n, r)) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ C_n^r + C_{n-1}^r & 1 \leqslant r \leqslant n-1 \end{cases}$$

定理 3　设 $n \geqslant 3$，$0 \leqslant l \leqslant r \leqslant n-1$，则

$$r(\mathscr{DOPD}(n, r), \mathscr{DOPD}(n, l)) = \begin{cases} 0 & l = r \\ C_n^r + C_{n-1}^r & 0 \leqslant l < r \end{cases}$$

设 A 是自然序集$[n]$的非空子集，符号 ε_A 表示 A 上的恒等变换，用 Φ 表示空变换．规定 Φ 是保距变换；Φ 是部分一一保序变换．设 $\alpha \in \mathscr{DOPD}(n, r)$，用 $\operatorname{Im}(\alpha)$ 表示 α 的像集，$\operatorname{Ker}(\alpha)$ 表示 $\operatorname{Dom}(\alpha)$ 上的如下等价关系：

$$\operatorname{Ker}(\alpha) = \{(x, y) \in \operatorname{Dom}(\alpha) \times \operatorname{Dom}(\alpha) : x\alpha = y\alpha\}$$

对任意的 $t \in \operatorname{Im}(\alpha)$，$t\alpha^{-1}$ 表示 t 的原像集且 $|t\alpha^{-1}| = 1$．若

$$|\operatorname{Im}(\alpha)| = k \qquad 1 \leqslant k \leqslant r \leqslant n-1$$

则由保序性及保距性容易验证 α 有表示法

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k \end{pmatrix}$$

其中

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{k-1} < a_k$$
$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{i-1} < b_i < b_{i+1} < \cdots < b_{k-1} < b_k$$

对任意的 $j, p \in \{1, 2, \cdots, i-1, i, i+1, \cdots, k-1, k\}$，有 $|a_j - a_p| = |b_j - b_p|$，于是，令

$$A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{k-1} < a_k\}$$
$$B = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_{i-1} < b_i < b_{i+1} < \cdots < b_{k-1} < b_k\}$$

记 $\alpha = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$，在下文的证明中用这种形式表示半群 $\mathscr{DOPD}_n$ 中元素特点．

为叙述方便，这里引用 Green* -等价关系[13]．不难验证，在半群 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 中，$\mathscr{L}^*$，$\mathscr{R}^*$，$\mathscr{J}^*$ 有如下刻画：对任意的 $\alpha, \beta \in \mathscr{DOPD}(n, r)$，有

$$(\alpha, \beta) \in \mathscr{L}^* \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Im}(\beta)$$
$$(\alpha, \beta) \in \mathscr{R}^* \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\beta)$$
$$(\alpha, \beta) \in \mathscr{J}^* \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(\alpha)| = |\operatorname{Im}(\beta)|$$

易见 $\mathscr{L}^* \subseteq \mathscr{J}^*$，$\mathscr{R}^* \subseteq \mathscr{J}^*$．记

$$\mathscr{J}_k^* = \{\alpha \in \mathscr{DOPD}(n, r) : |\operatorname{Im}(\alpha)| = k\} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, r-1, r$$

显然 $\mathscr{J}_0^*, \mathscr{J}_1^*, \mathscr{J}_2^*, \cdots, \mathscr{J}_{r-1}^*, \mathscr{J}_r^*$ 恰好是 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 的 $r+1$ 个 $\mathscr{J}^*$ -类，并且

$$\mathscr{DOPD}(n, r) = \{\alpha \in \mathscr{DOPD}_n : |\operatorname{Im}(\alpha)| \leqslant r\} = \bigcup_{k=0}^{r} \mathscr{J}_k^*$$

不难验证 $\mathscr{DOPD}_n$ 具有如下包含关系的双边星理想链：

$$\mathscr{DOPD}(n, 0) \subset \mathscr{DOPD}(n, 1) \subset \mathscr{DOPD}(n, 2) \subset \cdots \subset \mathscr{DOPD}(n, n-2) \subset \mathscr{DOPD}(n, n-1) = \mathscr{DOPD}_n$$

用 $X_n(r)$ 表示自然序集$[n] = \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$ $(n \geqslant 3)$ 的所有 r 元子集，则 $X_n(r)$ 中共有 C_n^r 个元素，其中 C_n^r 表示从 n 个元素中取出 r 个元素的组合数．令 $t = C_n^r$，记 $X_n(r) = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$，其中

$$A_i \subseteq [n] \qquad |A_i| = r (i = 1, 2, \cdots, t-1, t)$$

定义 1[4]　若对任意的 $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{r-1} < a_r\}$，$B = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_{i-1} < b_i < b_{i+1} < \cdots < b_{r-1} < b_r\} \in X_n(r)$，如果对 $i = 2, 3, \cdots, r-1, r$，有 $a_i - a_{i-1} = b_i - b_{i-1}$，则称 A 与 B 同距，否则称 A 与 B 不同距．

将 $X_n(r)$ 按照同距概念进行分类. 对任意的 $A \in X_n(r)$，记 A 的同距类为$[A]$. 进一步可证：对任意的

$$A=\{a_1<a_2<\cdots<a_{i-1}<a_i<a_{i+1}<\cdots<a_{r-1}<a_r\}\in X_n(r)$$

必定存在

$$C=\{1<c_2<\cdots<c_{i-1}<c_i<c_{i+1}<\cdots<c_{r-1}<c_r\}\in X_n(r)$$

使得 C 与 A 同距，其中

$$c_i=1+\sum_{j=2}^{i}(a_j-a_{j-1}) \qquad i=2,3,\cdots,r-1,r$$

本文未定义的术语及符号参见文献[14-16].

为完成定理的证明，先给出若干引理与推论.

引理 1 对 $0\leqslant k\leqslant 1$，有 $\mathscr{I}_k^*\subseteq \mathscr{I}_{k+1}^*\cdot \mathscr{I}_{k+1}^*$.

证 设 Φ 是空变换，则 $\mathscr{I}_0^*=\{\Phi\}$. 令 $\beta=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，则 $\beta,\gamma\in\mathscr{I}_1$ 且 $\Phi=\beta\gamma$，即 $\mathscr{I}_0^*\subseteq\mathscr{I}_1^*\cdot\mathscr{I}_1^*$.

对任意的 $\alpha\in\mathscr{I}_1^*$，不妨设 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，以下分 2 种情形证明 $\mathscr{I}_1^*\subseteq\mathscr{I}_2^*\cdot\mathscr{I}_2^*$.

情形 1 若 $a=b$，由 $n\geqslant 3$，则存在$\{c,d\}\in[n]\backslash\{a\}$，使得

$$A=\{a,c\} \qquad B=\{a,d\}$$

则 $\varepsilon_A,\varepsilon_B\in\mathscr{I}_2^*$，且 $\alpha=\varepsilon_A\cdot\varepsilon_B$.

情形 2 若 $a>b$，分两种子情形证明.

情形 2.1 若 $b=1$，令

$$\beta=\begin{pmatrix}a-1 & a\\ a-1 & a\end{pmatrix} \qquad \gamma=\begin{pmatrix}a & a+1\\ b & b+1\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{I}_2^*$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 2.2 若 $b\geqslant 2$，令

$$\beta=\begin{pmatrix}a-2 & a\\ a-2 & a\end{pmatrix} \qquad \gamma=\begin{pmatrix}a-1 & a\\ b-1 & b\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{I}_2^*$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

引理 2 对 $2\leqslant k\leqslant r-1$，$3\leqslant r\leqslant n-1$，有 $\mathscr{I}_k^*\subseteq\mathscr{I}_{k+1}^*\cdot\mathscr{I}_{k+1}^*$.

证 对任意的 $\alpha\in\mathscr{I}_k^*$，设 α 的标准表示为

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

其中

$$a_1<a_2<\cdots<a_{i-1}<a_i<a_{i+1}<\cdots<a_{k-1}<a_k$$
$$b_1<b_2<\cdots<b_{i-1}<b_i<b_{i+1}<\cdots<b_{k-1}<b_k$$

对任意的 $j,p\in\{1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,k-1,k\}$，有

$$|a_j-a_p|=|b_j-b_p| \qquad b_j\leqslant a_j$$

以下分 4 种情形证明存在 $\beta,\gamma\in\mathscr{I}_{k+1}^*$ 使得 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 1 若存在 $j\in\{2,3,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,k-1,k\}$，使得 $a_j-a_{j-1}\geqslant 3$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{j-1} & a_j-1 & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j-1 & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j-2 & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j-2 & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathscr{I}_{k+1}^*$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 2 若存在 $j,p\in\{2,3,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,k-1,k\}$，且 $j\neq p$，使得 $a_j-a_{j-1}\geqslant 2$ 且 $a_p-a_{p-1}\geqslant 2$，不失一般性，不妨设 $j<p$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j-1 & a_j & \cdots & a_{p-1} & a_p & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{j-1} & b_j-1 & b_j & \cdots & b_{p-1} & b_p & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{j-1} & b_j & \cdots & b_{p-1} & b_p-1 & b_p & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{j-1} & b_j & \cdots & b_{p-1} & b_p-1 & b_p & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{J}^*_{k+1}$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 3　若存在 $j\in\{2,3,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,k-1,k\}$，使得 $a_j-a_{j-1}=2$，且对任意的

$$p\in\{2,3,\cdots,j-2,j-1\}\cup\{j+1,j+2,\cdots,k-1,k\}$$

有 $a_p-a_{p-1}=1$. 由此可见：$a_1=1$，必有 $a_k<n$；或$a_k=n$，必有 $a_1>1$. 否则由 $a_1=1$ 且 $a_k=n$ 可得 $\alpha\in\mathcal{J}^*_{n-1}$，即 $k=n-1$，与 $2\leqslant k\leqslant r-1$，$3\leqslant r\leqslant n-1$ 矛盾. 利用保序性和保距性，类似地可得到：$b_1=1$，必有 $b_k<n$；或 $b_k=n$，必有 $b_1>1$.

当 $b_1>1$ 时，则 $b_1-1\geqslant 1$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{j-1} & a_j-1 & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j-1 & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}b_1-1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\\ b_1-1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{J}^*_{k+1}$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

当 $b_k<n$ 时，则 $b_k+1\leqslant n$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{j-1} & a_j-1 & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j-1 & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_k+1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{j-1} & b_j & b_{j+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_k+1\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{J}^*_{k+1}$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 4　对任意的 $j\in\{2,3,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,k-1,k\}$ 使得 $a_j-a_{j-1}=1$，利用保序性和保距性可知：对任意的 $j\in\{2,3,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,k-1,k\}$，$b_j-b_{j-1}=1$. 由 $2\leqslant k\leqslant r-1$，$3\leqslant r\leqslant n-1$ 可知 $k\leqslant n-2$，即 $k+2\leqslant n$.

如果 $a_1\neq 1$，分以下 3 种子情形证明：

情形 4.1　如果 $b_1=1$，则 $b_k<n-1$. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1-1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & i+2 & \cdots & k & k+1\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & \cdots & i & i+1 & i+2 & \cdots & k+1 & k+2\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_k & b_k+1\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{J}^*_{k+1}$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 4.2　如果 $2=b_1\leqslant a_1$，则

$$1\leqslant b_1-1\leqslant a_1-1$$

令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1-1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ b_1-1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k & n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k & n\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in\mathcal{J}^*_{k+1}$，且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 4.3　如果 $3\leqslant b_1\leqslant a_1\leqslant n$，则

$$1\leqslant b_1-2<b_1-1\leqslant a_1-1$$

令

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1-1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ b_1-1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}b_1-2 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\\ b_1-2 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma \in \mathscr{J}_{k+1}^{*}$，且 $\alpha = \beta\gamma$.

如果 $a_k \neq n$，分以下 2 种子情形证明：

情形 4.4　如果 $1 = b_1 \leqslant a_1$，令

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_k + 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_k + 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_k + 2 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_k + 2 \end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma \in \mathscr{J}_{k+1}^{*}$，且 $\alpha = \beta\gamma$.

情形 4.5　如果 $1 \neq b_1 \leqslant n-k \leqslant a_1$，令

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_k + 1 \\ n-k & n-k+1 & \cdots & n-k-2-i & n-k-1-i & n-k-i & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} n-k-1 & n-k & n-k+1 & \cdots & n-k-2-i & n-k-1-i & n-k-i & \cdots & n-2 & n-1 \\ b_1 - 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{k-1} & b_k \end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma \in \mathscr{J}_{k+1}^{*}$，且 $\alpha = \beta\gamma$.

定理 1 的证明　由引理 1 和引理 2 可知，任意的 $\alpha \in \mathscr{DOPD}(n, r)$ 可以表达成 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 的顶端 $\mathscr{J}^{*}$ -类 $\mathscr{J}_r^{*}$ 中秩为 r 的若干元素的乘积或 $\alpha \in \mathscr{J}_r^{*}$. 换句话说，$\mathscr{J}_r^{*}$ 是 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 的生成集，即

$$\mathscr{DOPD}(n, r) = \langle J_r^{*} \rangle$$

引理 3　设自然数 $n \geqslant 3$，则 $\operatorname{rank}(\mathscr{DOPD}(n, 0)) = 1$，$\operatorname{rank}(\mathscr{DOPD}(n, 1)) = C_n^1 + C_{n-1}^1 = 2n-1$.

证　由引理 1 的证明过程易知

$$\mathscr{DOPD}(n, 0) = \mathscr{J}_0^{*} = \{\Phi\}$$

显然有

$$\operatorname{rank}(\mathscr{DOPD}(n, 0)) = 1$$

首先，容易验证

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\alpha_{i-1} = \begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} i+1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} i+2 \\ i+1 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\alpha_{n-2} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-2 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad \alpha_{2n-2} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{2n-1} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \in \mathscr{J}_1^{*}$$

令

$$M = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}\}$$

则

$$|M| = C_n^1 + C_{n-1}^1 = 2n-1$$

其次，对任意的 $\alpha \in \mathscr{J}_1^{*}$，必存在 $i, j \in \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$，使得 $\alpha = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$，则当 $i = j$ 时，有 $\alpha = \alpha_{n+i-1}$；当 $i > j$ 时，有 $\alpha = \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j+2}\alpha_{j+1}\alpha_j$.

由此可见，$\mathscr{J}_1^{*} \subseteq \langle M \rangle$. 结合定理 1 知 $\mathscr{DOPD}(n, 1) = \langle M \rangle$. 注意到 $|M| = C_n^1 + C_{n-1}^1 = 2n-1$.

引理 4　设 $n \geqslant 3$，$2 \leqslant r \leqslant n-1$，则在 $\mathscr{J}_r^{*}$ 中存在基数为 $C_n^r + C_{n-1}^r$ 的集合 M，使得 $\mathscr{J}_r^{*} \subseteq \langle M \rangle$.

证　首先，构造 $\mathscr{J}_r^{*}$ 中基数为 $C_n^r + C_{n-1}^r$ 的集合 M.

对任意的 $A \in X_n(r) = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}(t = C_n^r + C_{n-1}^r)$，不妨设

$$[A] = \{A = B_1, B_2, \cdots, B_{m-1}, B_m\}$$

其中

$$m < t = C_n^r + C_{n-1}^r$$
$$\min B_1 < \min B_1 < \cdots < \min B_{m-1} < \min B_m$$

若 $m = 1$，只有 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \varepsilon_A \in \mathscr{J}_r^*$.

若 $2 < m \leqslant t = C_n^r + C_{n-1}^r$，容易验证

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} B_2 \\ B_1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} B_3 \\ B_2 \end{pmatrix} \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} B_4 \\ B_3 \end{pmatrix}$$
$$\cdots$$
$$\alpha_{i-1} = \begin{pmatrix} B_i \\ B_{i-1} \end{pmatrix} \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} B_{i+1} \\ B_i \end{pmatrix} \qquad \alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} B_{i+2} \\ B_{i+1} \end{pmatrix}$$
$$\cdots$$
$$\alpha_{m-1} = \begin{pmatrix} B_m \\ B_{m-1} \end{pmatrix} \qquad \alpha_m = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{m+1} = \begin{pmatrix} B_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$
$$\cdots$$
$$\alpha_{2m-2} = \begin{pmatrix} B_{m-1} \\ B_{m-1} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{2m-1} = \begin{pmatrix} B_m \\ B_m \end{pmatrix} \in \mathscr{J}_r^*$$

对其余的保降序同距类也用类似的方式进行构造，可以得到集合

$$M = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{2m-1}, \alpha_2 m, \alpha_{2m+1}, \cdots, \alpha_{t-1}, \alpha_t\}$$

用t_1, t_2 分别表示当 $|[A]| = 1$ 和 $|[A]| \geqslant 2$ 时生成元的个数，若 $1 \in A$ 且$n \in A$，则 $|[A]| = 1$，若$1 \in A$ 且 $n \notin A$，则 $|[A]| \geqslant 2$，则

$$t_1 = C_{n-2}^{r-2} \qquad t_2 = 2(C_n^r - C_{n-2}^{r-2}) - C_{n-2}^{r-1}$$

即

$$\begin{aligned} t = & t_1 + t_2 = C_{n-2}^{r-2} + 2(C_n^r - C_{n-2}^{r-2}) - C_{n-2}^{r-1} = C_{n-2}^{r-2} + 2C_n^r - 2C_{n-2}^{r-2} - C_{n-2}^{r-1} = \\ & 2C_n^r - (C_{n-2}^{r-2} + C_{n-2}^{r-1}) = 2C_n^r - C_{n-1}^{r-1} = \\ & C_n^r + (C_n^r - C_{n-1}^{r-1}) = C_n^r + C_{n-1}^r \end{aligned}$$

其次，对任意的 $\alpha \in \mathscr{J}_r^*$，验证 $\alpha \in \langle M \rangle$，即 $\mathscr{J}_r^* \subseteq \langle M \rangle$.

对任意的 $\alpha \in \mathscr{J}_r^*$，必存在 $A \in X_n(r)$，使得 $\mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Dom}(\alpha) \in [A]$. 不失一般性，可设 $\alpha = \begin{pmatrix} B_i \\ B_j \end{pmatrix}$，其中，$B_i, B_j \in [A] = \{A = B_1, B_2, \cdots, B_{m-1}, B_m\}$ 且 $i, j \in \{1, 2, \cdots, m-1, m\}$.

若 $|[A]| = 1$，则 $\alpha = \varepsilon_A = \varepsilon_{\mathrm{Im}(\alpha)}$.

若 $|[A]| \geqslant 2$，则当 $i = j$ 时，有 $\alpha = \alpha_{m+i-1}$；当 $i > j$ 时，有 $\alpha = \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j$.

为叙述方便，这里引用符号 $\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} B_i \\ B_j \end{pmatrix}$.

引理 5　设自然数 $n \geqslant 3$，则 M 是半群 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 唯一的极小生成集.

证　对任意的 $\alpha_{st}, \alpha_{mn} \in M$，$s, t, m, n \in \{1, 2, \cdots, t-1, t\}$，当 $t = m$ 时，有 $\alpha_{st} \cdot \alpha_{mn} = \alpha_{sn}$；当 $t \neq m$ 时，有 $\alpha_{st} \cdot \alpha_{mn} \in \mathscr{DOPD}(n, r-1)$.

对任意的 $\alpha_{st}, \alpha_{mn} \notin M$，$s, t, m, n \in \{1, 2, \cdots, t-1, t\}$，当 $t = m$ 时，有 $\alpha_{st} \cdot \alpha_{mn} = \alpha_{sn} \notin M$；当 $t \neq m$ 时，有 $\alpha_{st} \cdot \alpha_{mn} \in \mathscr{DOPD}(n, r-1)$.

对任意的 $\alpha_{st} \in A_1$，$\alpha_{mn} \in A_2$ 且 $A_1 \notin [A_2]$，有 $\alpha_{st} \cdot \alpha_{mn} \in \mathscr{DOPD}(n, r-1)$.

定理 2 的证明　由引理 3 与引理 4 可知，任意的 $\alpha \in \mathscr{J}_r^*$ 可以表达为M 中若干元素的乘积或$\alpha \in M$，即 $\mathscr{J}_r^* \subseteq \langle M \rangle$. 再由定理1知，$M$是 $\mathscr{DOPD}(n, r)$ 的生成集，即 $\mathscr{DOPD}(n, r) = \langle M \rangle$，其中$M$的定义见引理4与引理 5 的证明过程. 注意到 $|M| = C_n^r + C_{n-1}^r$，进一步有

$$\mathrm{rank}(\mathscr{DOPD}(n, r)) \leqslant C_n^r + C_{n-1}^r$$

因此，结合引理 5，有 $\mathrm{rank}(\mathscr{DOPD}(n, r)) = C_n^r + C_{n-1}^r$.

定理 3 的证明 当 $l=r$ 时，显然有 $r(\mathscr{DOPD}(n,r),\mathscr{DOPD}(n,l))=0$.

当 $0\leqslant l<r$ 时，由定理 1 与定理 2 的证明过程可知

$$\mathscr{DOPD}(n,r)=\langle M\rangle \qquad M\cap\mathscr{DOPD}(n,l)=\{\Phi\} \qquad |M|=C_n^r+C_{n-1}^r$$

再由相关秩的定义，可知

$$r(\mathscr{DOPD}(n,r),\mathscr{DOPD}(n,l))=C_n^r+C_{n-1}^r$$

则

$$r(\mathscr{DOPD}(n,r),\mathscr{DOPD}(n,l))=\begin{cases}0 & l=r\\ C_n^r+C_{n-1}^r & 0\leqslant l<r\end{cases}$$

参考文献：

[1] 罗永贵，游泰杰，高荣海．关于 OI_n 和 DOI_n 的理想的生成集及其秩 [J]．贵州师范大学学报(自然科学版)，2012，30(2)：54-58．

[2] 吴金艳，赵 平，游泰杰．半群 $\mathscr{OI}_n$ 的偏度秩 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2015，37(10)：67-71．

[3] 赵 平，徐 波，游泰杰．半群 CPO_n 的秩 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2011，33(6)：106-110．

[4] 罗永贵，徐 波，高荣海．半群 CPO_n 的每个星理想的秩和相关秩 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2013，35(8)：77-82．

[5] 徐 波，冯荣权，高荣海．一类变换半群的秩 [J]．数学的实践与认识，2010，40(8)：222-224．

[6] 高荣海，徐 波．关于保序压缩奇异变换半群的秩 [J]．山东大学学报(理学版)，2011，46(6)：4-7．

[7] 罗永贵，徐 波，游泰杰．半群 CDO_n 的每个星理想的秩和相关秩 [J]．数学的实践与认识，2015，45(12)：240-245．

[8] 罗永贵，徐 波，游泰杰．半群 H_n 的每个星理想的秩和幂等元秩 [J]．四川师范大学学报(自然科学版)，2014，37(1)：58-61．

[9] 罗永贵，杨丛丽．$U(n,r)$的秩和拟幂等元秩 [J]．四川师范大学学报(自然科学版)，2015，38(4)：508-513．

[10] 龙伟锋，徐 波，游泰杰，等．保 E 且严格保序部分一一变换半群的秩 [J]．四川师范大学学报(自然科学版)，2014，37(3)：316-319．

[11] 罗永贵．半群 $W_D(n,r)$的非群元秩和相关秩 [J]．四川师范大学学报(自然科学版)，2017，40(3)：308-312．

[12] 李宪崇，赵 平．半群 $O_n(k)$的秩 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(10)：9-12．

[13] HOWIE J M，RUŠKUC N，HIGGINS P M．On Relative Ranks of Full Transformation Semigroups [J]．Communications in Algebra，1998，26(3)：733-748．

[14] FOUNTAIN J．Abundant Semigroups [J]．Proc London Math soc，1982，44(S3)：103-129．

[15] HOWIE J M．Fundamentals of Semigroup Theory [M]．Oxford：Oxford University Press，1995．

[16] GANYUSHKIN O，MAZORCHUK V．Classical Finite Transformation Semigroups [M]．London：Springer-Verlag，2009．

On Rank and Relative Rank of Semigroup $\mathscr{DOPD}(n,r)$

LI Xiao-min， LUO Yong-gui， ZHAO Ping

School of Mathematics Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China

Abstract：Let $\mathscr{DOPD}_n$ be the semigroup of all order-preserving and distance-preserving partial one-to-one singular order-decreasing transformations on a finite-chain $[n]$ $(n\geqslant 3)$，and let $\mathscr{DOPD}(n,r)=\mathscr{DOPD}(n,r)=\{\alpha\in\mathscr{DOPD}_n:|\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$ be the two-sided star ideal of the semigroup $\mathscr{DOPD}_n$ for an arbitrary integer r such that $0\leqslant r\leqslant n-1$. By analyzing the elements of rank r and star Green's relations，the minimal generating set and rank of the semigroup $\mathscr{DOPD}(n,r)$ are obtained，respectively. Furthermore，the relative rank of the semigroup $\mathscr{DOPD}(n,r)$ with respect to itself each star ideal $\mathscr{DOPD}(n,l)$ is determined for $0\leqslant l\leqslant r$.

Key words：order-preserving；distance-preserving；order-decreasing；partial one-to-one singular transformation semigroup；rank；relative rank

责任编辑 廖 坤