第 44 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 12 月
Vol. 44　No. 12　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Dec.　2019

DOI:10. 13718/j. cnki. xsxb. 2019. 12. 005

双线性分数次积分算子交换子在 Triebel-Lizorkin 空间上有界的充分必要条件①

房 成 龙

伊犁师范大学 数学与统计学院，新疆 伊宁 835000

摘要： 首先讨论了双线性分数次积分算子与 Lipschitz 函数生成的线性交换子在 Triebel-Lizorkin 空间上的有界性. 然后证明了 $b_1=b_2$ 为 Lipschitz 函数的等价条件是双线性分数次积分算子交换子从乘积 Lebesgue 空间到 Lebesgue 空间(或 Triebel-Lizorkin 空间)有界.

关　键　词： 双线性分数次积分；交换子；Lipschitz 函数；Triebel-Lizorkin 空间；有界性

中图分类号：O174. 2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2019)12－0024－07

20 世纪 70 年代，文献[1-2] 发现 Calderón-Zygmund 奇异积分算子交换子的研究可以归结为一类双线性奇异积分算子的研究，并获得了 Calderón-Zygmund 奇异积分算子交换子在 Lebesgue 空间上的有界性，之后许多学者开始研究交换子[3-6].

设 $\beta>0$，若函数 f 满足

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x,h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\beta}<\infty$$

则称 f 属于 Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\beta$. 对方体 Q，$f_Q=\dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q f(x)\mathrm{d}x$.

文献[5] 证明了

$$b\in\dot{\Lambda}_\beta\Leftrightarrow C_f^\alpha:L^p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow F_q^{\beta,\infty}\text{ 有界}\Leftrightarrow C_f^\alpha:L^p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)\text{ 有界}\tag{1}$$

其中 C_f^α 是分数次积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子，

$$0<\beta<1\qquad 1<p<q<\infty$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}\qquad \frac{1}{p}-\frac{1}{r}=\frac{\alpha+\beta}{n}$$

等价关系(1) 的证明用到了文献[6] 中讨论的 Triebel-Lizorkin 空间 $F_p^{\beta,\infty}$ 的一个重要性质：

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}}\approx\left\|\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}}\int_Q|f-f_Q|\mathrm{d}x\right\|_p$$

受文献[5] 结果的启发，一个自然的问题产生了：双线性分数次积分算子交换子的有界性是否可以刻画 Lipschitz 空间? 本文在第二部分给出了肯定的回答.

定义 1[7]　设 $0<\alpha<2n$，双线性分数次积分算子 I_α 定义为

$$I_\alpha(f_1,f_2)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f_1(y_1)f_2(y_2)}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

---

① 收稿日期：2019－05－14

基金项目：国家自然科学基金项目(11561067，11661075)；新疆自治区自然科学基金项目(2016D01C381，2019D01C334).

作者简介：房成龙(1992－)，男，讲师，主要从事调和分析的研究.

文献[7] 获得了 $I_\alpha: L^{p_1} \times L^{p_2} \longrightarrow L^q$ 的有界性，其中

$$1 < p_1, p_2 < q < \infty$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \qquad 0 < \alpha < 2n$$

另外，有关多线性分数次积分算子的研究可见文献[8].

本文主要讨论两种类型的交换子，下面给出其定义.

定义 2　设 $b_j \in L^1_{\text{loc}}(j = 1,2)$，$I_\alpha$ 是双线性分数次积分算子.

(a) 线性交换子$[\Sigma\vec{b}, I_\alpha]$定义为

$$[\Sigma\vec{b}, I_\alpha](f_1, f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{[(b_1(x) - b_1(y_1)) + (b_2(x) - b_2(y_2))] f_1(y_1) f_2(y_2)}{(|x - y_1| + |x - y_2|)^{2n-\alpha}} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2$$

(b) 迭代交换子$[\Pi\vec{b}, I_\alpha]$定义为

$$[\Pi\vec{b}, I_\alpha](f_1, f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b_1(x) - b_1(y_1))(b_2(x) - b_2(y_2)) f_1(y_1) f_2(y_2)}{(|x - y_1| + |x - y_2|)^{2n-\alpha}} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2$$

文献[9] 证明了 $b_1, b_2 \in \dot{\Lambda}_\beta$ 时，从乘积 Lebesgue 空间到 Lebesgue 空间(或 Triebel-Lizorkin 空间)的算子$[\Pi\vec{b}, I_\alpha]$是有界的.

文献[10] 验证了文献[9] 的结果对一种广义高阶交换子也成立.

文献[11] 证明了

$$b_1, b_2 \in \dot{\Lambda}_\beta \Leftrightarrow [\Sigma\vec{b}, I_\alpha]: L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \text{ 有界}$$

其中

$$0 < \alpha < 2n \qquad 0 < \beta < 1$$

且

$$\alpha + \beta < 2n \qquad 1 < p_1, p_2 < \infty$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \qquad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha + \beta}{n}$$

受文献[5-11] 中结果的启发，本文的第一部分证明了 $b_1, b_2 \in \dot{\Lambda}_\beta$ 时，线性交换子$[\Sigma\vec{b}, I_\alpha]$在 Triebel-Lizorkin 空间上有界；第二部分验证了$[\Sigma\vec{b}, I_\alpha]$和$[\Pi\vec{b}, I_\alpha]$在 Lebesgue 空间、Triebel-Lizorkin 空间上的有界性可以刻画 Lipschitz 空间.

对于一个集合 A，χ_A 表示其特征函数. C 表示常数，每次出现时有可能其值并不相同. 当 $C > 0$ 时，$A \leqslant CB$ 用 $A \lesssim B$ 来表示；同时，$A \approx B$ 表示 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$.

1　分数次积分算子的线性交换子在 Triebel-Lizorkin 空间上的有界性

引理 1　设 $0 < \beta < 1$，则：

(i) 若 $1 < q \leqslant \infty$，则

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \approx \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |f - f_Q| \mathrm{d}x \approx \sup_Q \frac{1}{|Q|^{\frac{\beta}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

(ii) 若 $1 < p < \infty$，则

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}} \approx \left\| \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |f - f_Q| \mathrm{d}x \right\|_p$$

(i) 的证明见文献[12]，且 $q = \infty$ 显然成立. (ii) 的证明见文献[6].

引理 2　设 $1 < p < q < \infty$，$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$. h^Q 是一个定义在方体 Q 上的函数. 若 $0 \leqslant \gamma$，则

$$\left\| \sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |h^Q| \mathrm{d}x \right\|_q \leqslant C \left\| \sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\gamma}{n}+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |h^Q| \mathrm{d}x \right\|_p$$

其中常数 C 与 p, q, α 和 n 有关.

定理 1 设 $0<\beta<1$, $1<r<\infty$, $1<p_1, p_2<q<\infty$. $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n}$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{r}=\frac{\alpha+\beta}{n}$. 若 $b_1, b_2 \in \dot{\Lambda}_\beta$, 则 $[\Sigma\vec{b}, I_\alpha]: L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow F_q^{\beta,\infty}$ 有界.

证 通过引理 1(ii) 和引理 2, 可得

$$\|[\Sigma\vec{b}, I_\alpha](g_1, g_2)\|_{F_q^{\beta,\infty}} \lesssim$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |[\Sigma\vec{b}, I_\alpha](g_1, g_2) - ([\Sigma\vec{b}, I_\alpha](g_1, g_2))_Q| \mathrm{d}x \right\|_q \lesssim$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |[\Sigma b-\vec{b}_Q, I_\alpha](g_1, g_2) - ([\Sigma b-\vec{b}_Q, I_\alpha](g_1, g_2))_Q| \mathrm{d}x \right\|_q \lesssim$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |[\Sigma b-\vec{b}_Q, I_\alpha](g_1, g_2) - I_\alpha(g_1^\infty, (b-b_Q)g_2^\infty)(x_Q) -\right.$$
$$\left. I_\alpha((b-b_Q)g_1^\infty, g_2^\infty)(x_Q)| \mathrm{d}x \right\|_q \lesssim$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |(b-b_Q)I_\alpha(g_1, g_2)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |I_\alpha((b-b_Q)g_1, g_2) + I_\alpha(g_1, (b-b_Q)g_2) -\right.$$
$$\left. I_\alpha((b-b_Q)g_1^\infty, g_2^\infty)(x_Q) - I_\alpha(g_1^\infty, (b-b_Q)g_2^\infty)(x_Q)| \mathrm{d}x \right\|_p \lesssim$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |(b-b_Q)I_\alpha(g_1, g_2)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |I_\alpha((b-b_{1_Q})g_1^0, g_2^0)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |I_\alpha((b-b_{1_Q})g_1^0, g_2^\infty)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |I_\alpha((b-b_{1_Q})g_1^\infty, g_2^0)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |I_\alpha(g_1^0, (b-b_Q)g_2^0)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |I_\alpha(g_1^0, (b-b_Q)g_2^\infty)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |I_\alpha(g_1^\infty, (b-b_Q)g_2^0)| \mathrm{d}x \right\|_q +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}} \sup_{y\in Q} |I_\alpha((b-b_Q)g_1^\infty, g_2^\infty)(y) - I_\alpha((b-b_Q)g_1^\infty, g_2^\infty)(x_Q)| \mathrm{d}x \right\|_p +$$

$$\left\| \sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}} \sup_{y\in Q} |I_\alpha(g_1^\infty, (b-b_Q)g_2^\infty)(y) - I_\alpha(g_1^\infty, (b-b_Q)g_2^\infty)(x_Q)| \mathrm{d}x \right\|_p =$$

$$D_1+D_2+D_3+D_4+D_5+D_6+D_7+D_8+D_9$$

首先估计 D_1. 任意固定 $x\in Q$, 通过引理 1(i), 有

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\beta}{n}}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |(b-b_Q)I_\alpha(g_1, g_2)| \mathrm{d}x \lesssim$$

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\beta}{n}}}\sup_{y\in Q}|(b(y)-b_Q)|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |I_\alpha(g_1,g_2)|\mathrm{d}x\right)\lesssim$$
$$\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}M(I_\alpha(g_1,g_2))(x)$$

根据 I_α 的有界性[7]，得

$$D_1\lesssim\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|I_\alpha(g_1,g_2)\|_q\lesssim\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|g_1\|_{p_1}\|g_2\|_{p_2}$$

再估计 D_2．运用 Minkowski 不等式和 I_α 的有界性，有

$$\left\|\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}}\int_Q|I_\alpha((b-b_Q)g_1^0,g_2^0)|\mathrm{d}x\right\|_{L^q}\lesssim$$
$$\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}}\int_Q\left\|I_\alpha((b-b_Q)g_1^0,g_2^0)\right\|_{L^q}\mathrm{d}x\lesssim$$
$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\beta}{n}}}\left(\int_Q|(b-b_Q)g_1^0|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_Q|g_2^0|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}}\lesssim$$
$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\beta}{n}}}\sup_{y\in Q}|b(y)-b_Q|\ \|g_1\|_{p_1}\|g_2\|_{p_2}\lesssim$$
$$\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|g_1\|_{p_1}\|g_2\|_{p_2}$$

因此

$$D_2\lesssim\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|g_1\|_{p_1}\|g_2\|_{p_2}$$

同理得

$$D_m\lesssim\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|g_1\|_{p_1}\|g_2\|_{p_2}\qquad m=3,4,5,6,7$$

由于

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}}|I_\alpha((b-b_Q)g_1^\infty,g_2^\infty)(y)-I_\alpha((b-b_Q)g_1^\infty,g_2^\infty)(x_Q)|\lesssim$$
$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}}\int_{(2Q)^c}\int_{(2Q)^c}\frac{|b(y_1)-b_Q||g_1(y_1)||g_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\lesssim$$
$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}}\int_{(2Q)^c}\frac{|g_2(y_2)|}{|x-y_2|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y_2\times\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}}\int_{(2Q)^c}\frac{|g_1(y_1)|}{|x-y_1|^{n-\frac{\alpha}{2}}}|b(y_1)-b_Q|\mathrm{d}y_1\lesssim$$
$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}}\int_{(2Q)^c}\frac{|g_2(y_2)|}{|x-y_2|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y_2\times\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}}}\int_{(2Q)^c}\frac{|g_1(y_1)|}{|x-y_1|^{n-\frac{\alpha}{2}}}|b(y_1)-b_Q|\mathrm{d}y_1\lesssim$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{2^{-(m-1)\cdot n-\frac{\alpha}{2}-m+\frac{m\alpha}{2}}}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}-\frac{\alpha}{2n}}}\int_{2^mQ\backslash 2^{m-1}Q}|2^mQ|^{-1}|g_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\times$$
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{-(k-1)\cdot n-\frac{\alpha}{2}-k+\frac{k\alpha}{2}}}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}-\frac{\alpha}{2n}}}\int_{2^kQ\backslash 2^{k-1}Q}|2^kQ|^{-1}(|b(y_1)-b_{2^kQ}|+|b_{2^kQ}-b_Q|)|g_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\lesssim$$
$$\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{2^{-(m-1)\cdot n-\frac{\alpha}{2}-m+\frac{m\alpha}{2}}}{|Q|^{\frac{\alpha}{2n}+\frac{\beta}{n}}}M(g_2)(x)\right)\times$$
$$\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{-(k-1)\cdot n-\frac{\alpha}{2}-k+\frac{k\alpha}{2}}}{|Q|^{\frac{\alpha}{2n}+\frac{\beta}{n}}}|2^kQ|^{\frac{\beta}{n}}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}M(g_1)(x)\right)\lesssim$$
$$\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|Q|^{-\frac{\alpha}{n}-\frac{\beta}{n}}M(g_1)(x)M(g_2)(x)\lesssim$$
$$\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}M(g_1)(x)M(g_2)(x)$$

因此

$$D_8\lesssim\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|M(g_1)M(g_2)\|_p\lesssim\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|M(g_1)\|_{p_1}\|M(g_2)\|_{p_2}\lesssim$$
$$\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|g_1\|_{p_1}\|g_2\|_{p_2}$$

同理得

$$D_9 \lesssim \| b \|_{\dot{\Lambda}_\beta} \| g_1 \|_{p_1} \| g_2 \|_{p_2}$$

结合前面的估计，定理 1 得证.

2 刻画 Lipschitz 空间

定理 2 设 $0 < \beta < 1$，$1 < r < \infty$，$1 < p_j < q < \infty (j = 1,2)$. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$，$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$，$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{r} = \frac{\alpha + \beta}{n}$. 若 $b_1 = b_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}$，则下面结论等价：

(i) $b_i \in \dot{\Lambda}_\beta (i = 1,2)$；

(ii) $[\Sigma \vec{b}, I_\alpha]: L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow F_q^{\beta,\infty}$ 有界；

(iii) $[\Sigma \vec{b}, I_\alpha]: L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ 有界；

(iv) $[\Pi \vec{b}, I_\alpha]: L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow F_q^{\beta,\infty}$ 有界；

(v) $[\Pi \vec{b}, I_\alpha]: L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ 有界.

证 根据定理 1、文献[11]的定理 2.6 及文献[9]的定理 1 和定理 3，只需说明(ii)⇒(i)，(iv)⇒(i) 和(v)⇒(i) 成立即可.

选择 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$t > 0$，令

$$Q = Q(x_0, t) \qquad Q^0 = Q(x_0 + z_1 t, t)$$

设 $x \in Q$，$y_1, y_2 \in Q^0$. 根据文献[13]中第 3 页的证明，可得

$$\left(\left| \frac{y_1 - x}{t} \right|^2 + \left| \frac{y_2 - x}{t} \right|^2 \right)^{n - \frac{\alpha}{2}} = \delta^{-2n+\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t} v_m (y_1 - x,\, y_2 - x)}$$

(ii)⇒(i)：令

$$s(x) = \overline{\operatorname{sgn}(b(x) - b_{Q^0})}$$

则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |(b_i(x) - b_{i_Q})| \,\mathrm{d}x \lesssim \\
&\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \int_Q |(b_i(x) - b_{i_{Q^0}})| \,\mathrm{d}x \lesssim \\
&\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}} \frac{1}{|Q^0|^2} \int_Q s(x) \left(\int_{Q^0} \int_{Q^0} ((b_1(x) - b_1(y_1)) + (b_2(x) - b_2(y_2))) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \right) \mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{t^{3n+\beta}} \int_Q s(x) \left(\int_{Q^0} \int_{Q^0} \frac{(b_1(x) - b_1(y_1)) + (b_2(x) - b_2(y_2))}{(|x - y_1|^2 + |x - y_2|^2)^{n - \frac{\alpha}{2}}} \cdot \right. \\
&\left. (|x - y_1|^2 + |x - y_2|^2)^{n - \frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \right) \mathrm{d}x = \\
&\frac{t^{n - \frac{\alpha}{2}}}{t^{3n+\beta}} \int_Q s(x) \left(\int_{Q^0} \int_{Q^0} \frac{(b_1(x) - b_1(y_1)) + (b_2(x) - b_2(y_2))}{(|x - y_1|^2 + |x - y_2|^2)^{n - \alpha/2}} \cdot \right. \\
&\left. \left(\frac{|y_1 - x|^2 + |y_2 - x|^2}{t} \right)^{n - \frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \right) \mathrm{d}x = \\
&\frac{\delta^{-2n+\alpha}}{t^{2n+\frac{\alpha}{2}+\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_Q s(x) \left(\int_{Q^0} \int_{Q^0} \frac{(b_1(x) - b_1(y_1)) + (b_2(x) - b_2(y_2))}{(|x - y_1|^2 + |x - y_2|^2)^{n - \frac{\alpha}{2}}} \cdot \right. \\
&\left. \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t} v_m (y_1, y_2)} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{t} v_m (x, x)} \mathrm{d}x \lesssim
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta^{-2n+\alpha}}{t^{2n+\frac{\alpha}{2}+\beta}}\left|\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int_{\mathbb{R}^n}[\Sigma\vec{b},I_\alpha](\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^1 y_1},\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^2 y_2})(x)(\chi_Q(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m(x,x)}s^2(x))\mathrm{d}x\right|\lesssim$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|\ \|[\Sigma\vec{b},I_\alpha](\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^1 y_1},\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^2 y_2})\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}}\ \|\chi_Q\|_{\dot{F}_{p'}^{-\beta,1}}\lesssim$$

$$\|[\Sigma\vec{b},I_\alpha]\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to\dot{F}_p^{\beta,\infty}}$$

由于$[\Sigma\vec{b},I_\alpha]$：$L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\dot{F}_p^{\beta,\infty}$ 有界．因此，(ii)⇒(i) 得证．

(iv)⇒(i)：类似于(ii)⇒(i)，得

$$\left(\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}}\int_Q|(b_i(x)-b_{i_Q})|\mathrm{d}x\right)^2\lesssim$$

$$\frac{1}{|Q|^{2+\frac{2\beta}{n}}}\int_Q|(b(x)-b_Q)(b(x)-b_Q)|\mathrm{d}x\lesssim$$

$$\frac{1}{|Q|^{2+\frac{2\beta}{n}}}\int_Q|(b(x)-b_{Q^0})(b(x)-b_{Q^0})|\mathrm{d}x\lesssim$$

$$\frac{1}{|Q|^{2+\frac{2\beta}{n}}}\frac{1}{|Q^0|^2}\int_Q\left|\int_{Q^0}\int_{Q^0}(b(x)-b(y_1))(b(x)-b(y_2))\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|\mathrm{d}x\lesssim$$

$$\frac{\delta^{-2n+\alpha}}{t^{3n+\frac{\alpha}{2}+2\beta}}\left|\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int_{\mathbb{R}^n}[\Pi\vec{b},I_\alpha](\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^1 y_1},\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^2 y_2})(x)\chi_Q(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m(x,x)}s^2(x)\mathrm{d}x\right|\lesssim$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|\ \|[\Pi\vec{b},I_\alpha](\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^1 y_1},\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^2 y_2})\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}}\ \|\chi_Q\|_{\dot{F}_{p'}^{-\beta,1}}\lesssim$$

$$\|[\Pi\vec{b},I_\alpha]\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to\dot{F}_p^{\beta,\infty}}$$

(v)⇒(i)：类似于(iv)⇒(i)，可得

$$\left(\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}}\int_Q|(b_i(x)-b_{i_Q})|\mathrm{d}x\right)^2\lesssim$$

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int_{R^n}[\Pi\vec{b},I_\alpha](\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^1 y_1},\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^2 y_2})(x)\chi_Q(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m(x,x)}s^2(x)\mathrm{d}x\right|\lesssim$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|\ \|[\Pi\vec{b},I_\alpha](\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^1 y_1},\chi_{Q^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{t}v_m^2 y_2})\|_{L^r}\ \|\chi_Q\|_{L^{r'}}\lesssim$$

$$\|[\Pi\vec{b},I_\alpha]\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^r}$$

定理 2 证毕．

参考文献：

[1] COIFMAN R R，METER Y. On Commutators of Singular Integrals and Bilinear Singular Integrals [J]. Trans Amer Math Soc，1975，212：315-331.

[2] COIFMAN R R，ROCHBERG R，WEISS G. Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables [J]. Ann Math，1976，103(3)：611-635.

[3] 刘荣辉，周　疆. P-Adic 域上的多线性分数次 Hardy 算子交换子的估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(2)：6-13.

[4] 郭庆栋，周　疆. 分数次 Hardy 算子的交换子在 Lipschitz 空间上的端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(8)：41-47.

[5] PALUSZYNSKI M. Characterization of the Besov Spaces via the Commutator Operator of Coifman，Rochberg and Weiss [J]. Indiana Univ Math J，1995，44(1)：1-17.

[6] SEEGER A. A Note on Triebel-Lizorkin Spaces [J]. Approximation and Function Spaces，1989，22：391-400.

[7] KENIG C E，STEIN E M. Multilinear Estimates and Fractional Integration [J]. Math Res Lett，1999，6(1)：1-15.

[8] 周 盼，周 疆. 多线性分数次积分算子在 Morrey 型空间上新的端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(12)：74-80.

[9] 默会霞，张志英. 多线性分数次积分与 Lipschitz 函数生成的交换子的有界性 [J]. 数学物理学报(A 辑)，2011，31(5)：1447-1458.

[10] MO H X，YU D Y，ZHOU H P. Generalized Higher Commutators Generated by the Multilinear Fractional Integrals and Lipschitz Functions [J]. Turk J Math，2014，38：851-861.

[11] 王松柏，潘继斌，江寅生. 多线性分数次积分算子有界的充分必要条件 [J]. 数学物理学报(A 辑)，2015，35(6)：1106-1114.

[12] DEVORE R A，SHARPLEY R C. Maximal Functions Measuring Smoothness [M]. New York：Mem Amer Math Soc，1984.

[13] CHAFFEE L. Characterizations of BMO Through Commutators of Bilinear Singular Integral Operators [J]. Mathematics Subject Classification，2018，2018：1-7.

Sufficient and Necessary Conditions for Commutators of Bilinear Fractional Integral Operators to Be Bounded on Triebel-Lizorkin Spaces

FANG Cheng-long

School of Mathematics and Statistical，Yili Normal University，Yining Xinjiang 835000，China

Abstract：In this paper，we first discuss the boundedness of linear commutators generated by bilinear fractional integral operators and Lipschitz functions on Triebel-Lizorkin spaces. Then it is proved that $b_1=b_2$ is Lipschitz function and is equivalent to the boundedness of commutator by bilinear fractional integral operators from product Lebesgue spaces to Lebesgue spaces or Triebel-Lizorkin spaces.

Key words：bilinear fractional integral；commutators；Lipschitz function；Triebel-Lizorkin space；boundedness

责任编辑 廖 坤