第 44 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 12 月
Vol. 44　No. 12　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Dec.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.12.006

对偶 L_q 变换法则[①]

陶江艳，　李　晓

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在已有结果的基础上对对偶 L_q Brunn-Minkowski 理论做了一些推广，主要讨论了对偶 L_q Brunn-Minkowski 型不等式并得到部分结果. 给出统一的处理对偶 L_q Brunn-Minkowski 型不等式的方法，称此方法为对偶 L_q 变换法则，通过运用此法则给出了关于对偶混合体积著名的对偶 L_q Brunn-Minkowski 型不等式的简化证明.

关　键　词：对偶混合体积；对偶 Brunn-Minkowski 型不等式；对偶 L_q Brunn-Minkowski 型不等式

中图分类号：**O186.5**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2019)12－0031－04

Brunn-Minkowski 不等式是经典的等周不等式的推广，也是 Brunn-Minkowski 理论中重要的不等式之一[1-3]. 对偶 Brunn-Minkowski 理论是经典 Brunn-Minkowski 理论的自然发展. 对偶 Brunn-Minkowski 不等式是对偶 Brunn-Minkowski 理论中最重要的不等式之一[4-6].

设 K,L 是 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点的星体，则有

$$V(K\tilde{+}L)^{\frac{1}{n}}\leqslant V(K)^{\frac{1}{n}}+V(L)^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 互为膨胀，其中 $V(\cdot)$ 是 n 维的体积，$K\tilde{+}L$ 表示 K 与 L 的径向和.

20 世纪 60 年代初，文献[7]介绍了凸体的 L_q 加法及数乘，并建立了 L_q Brunn-Minkowski 不等式. 文献[8-9]推动了 L_q Brunn-Minkowski 理论的进一步发展. 关于 L_q Brunn-Minkowski 理论以及对偶 L_q Brunn-Minkowski 理论的最新讨论参见文献[10-12]. 对偶 L_q Brunn-Minkowski 不等式为：

设 K,L 是 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点的星体，$0<q<n$，则有

$$V(K\tilde{+}_qL)^{\frac{q}{n}}\leqslant V(K)^{\frac{q}{n}}+V(L)^{\frac{q}{n}} \tag{2}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 互为膨胀，其中 $K\tilde{+}_qL$ 表示 K 与 L 的 q 阶径向和.

本文主要研究对偶 Brunn-Minkowski 型不等式，用对偶 L_q 变换法则证明了与对偶混合体积有关的不等式.

有关凸几何的基本知识和常用符号可参见文献[3].

定义 1　给定函数 $\widetilde{F}$: $S_o^n\longrightarrow(0,+\infty)$，$K,L\in S_o^n$，若对 $\alpha\in(0,1)$，有

$$\widetilde{F}((1-\alpha)\cdot_qK\tilde{+}_q\alpha\cdot_qL)^q\leqslant(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q$$

则称 $\widetilde{F}$ 是 q-凸的. 当 $q=1$ 时，我们称 $\widetilde{F}$ 为凸的.

引理 1　设 $K,L\in S_o^n$，$0<q<1$，$0<\alpha<1$，则

$$(1-\alpha)\cdot_qK\tilde{+}_q\alpha\cdot_qL\subseteq(1-\alpha)K\tilde{+}\alpha L$$

等号成立当且仅当 $K=L$.

证　由 $(1-\alpha)\cdot_qK\tilde{+}_q\alpha\cdot_qL$ 的定义和 $0<q<1$，$t\in(0,\infty)$ 时 $f(t)=t^q$ 的严格凹性，对所有的 $u\in$

---

① 收稿日期：2019－04－26
作者简介：陶江艳(1994－)，女，硕士研究生，主要从事积分几何与凸几何分析的研究.
通信作者：李　晓，博士研究生.

S^{n-1}，有

$$\begin{aligned}\rho((1-\alpha)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L,u)^q=&(1-\alpha)\rho(K,u)^q+\alpha\rho(L,u)^q\leqslant\\&((1-\alpha)\rho(K,u)+\alpha\rho(L,u))^q=\\&\rho((1-\alpha)K\,\widetilde{+}\,\alpha L,u)^q\end{aligned}$$

所以

$$(1-\alpha)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L\subseteq(1-\alpha)K\,\widetilde{+}\,\alpha L$$

等号成立当且仅当

$$\rho(K,u)=\rho(L,u)\qquad\forall\,u\in S^{n-1}$$

即当且仅当 $K=L$.

定理 1 设 $\widetilde{F}:S_o^n\longrightarrow(0,+\infty)$ 是正齐次的、增的凸函数，$0<q<1$. 设 $K,L\in S_o^n$，则对所有的 $\alpha\in(0,1)$，有

$$\widetilde{F}((1-\alpha)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L)^q\leqslant(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha F(L)^q\tag{3}$$

当 $\widetilde{F}:S_o^n\longrightarrow(0,+\infty)$ 为严格增时，(3) 式中的等号成立当且仅当 K 与 L 互为膨胀.

证 不等式(3) 等价于

$$\frac{\widetilde{F}((1-\alpha)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L)}{((1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q)^{\frac{1}{q}}}\leqslant 1\tag{4}$$

由 $\widetilde{F}$ 的正齐次性，(4) 式等价于

$$\widetilde{F}\left(\frac{(1-\alpha)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L}{((1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q)^{\frac{1}{q}}}\right)\leqslant 1$$

即

$$\widetilde{F}\left(\left(\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q}\right)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q}\right)\bullet_q L\right)\leqslant 1\tag{5}$$

又因

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q}\right)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q}\right)\bullet_q L=\\&\left(\frac{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q}{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q}\right)\bullet_q\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}_q\left(\frac{\alpha\widetilde{F}(L)^q}{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q}\right)\bullet_q\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)=\\&(1-\alpha')\bullet_q\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}_q\alpha'\bullet_q\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)\end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$\alpha'=\frac{\alpha\widetilde{F}(L)^q}{(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q\,\widetilde{+}\,\alpha\widetilde{F}(L)^q}$$

结合(5) 式，不等式(3) 等价于

$$\widetilde{F}\left((1-\alpha')\bullet_q\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}_q\alpha'\bullet_q\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)\right)\leqslant 1$$

对(6) 式运用引理 1，得

$$(1-\alpha')\bullet_q\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}_q\alpha'\bullet_q\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)\subseteq(1-\alpha')\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}\,\alpha'\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)$$

因此，由 $\widetilde{F}$ 的单调性、凸性和正齐次性，有

$$\begin{aligned}&\widetilde{F}\left((1-\alpha')\bullet_q\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}_q\alpha'\bullet_q\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)\right)\leqslant\\&\widetilde{F}\left((1-\alpha')\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}\,\alpha'\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)\right)\leqslant\end{aligned}$$

$$(1-\alpha')\widetilde{F}\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)+\alpha'\widetilde{F}\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)= (1-\alpha')+\alpha'=1 \tag{7}$$

假设(3)式中等号成立，则(7)式中不等号应为等号，即

$$\widetilde{F}\left((1-\alpha')\bullet_q\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}_q\alpha'\bullet_q\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)\right)=\widetilde{F}\left((1-\alpha')\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}\alpha'\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)\right)$$

因 $\widetilde{F}$ 是严格增函数，则

$$(1-\alpha')\bullet_q\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}_q\alpha'\bullet_q\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)=(1-\alpha')\left(\frac{K}{\widetilde{F}(K)}\right)\widetilde{+}\alpha'\left(\frac{L}{\widetilde{F}(L)}\right)$$

又由引理 1 知

$$\frac{K}{\widetilde{F}(K)}=\frac{L}{\widetilde{F}(L)}$$

所以 K 与 L 互为膨胀.

另一方面，假设 K 与 L 互为膨胀，即 $K=\beta L$，$\beta>0$，则有

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L=&(1-\alpha)\bullet_q(\beta L)\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L=\\&(1-\alpha)^{\frac{1}{q}}\beta L\,\widetilde{+}_q\alpha^{\frac{1}{q}}L=\\&((1-\alpha)\beta^q+\alpha)^{\frac{1}{q}}L\end{aligned}$$

由 $\widetilde{F}$ 的正齐次性得到

$$\begin{aligned}\widetilde{F}((1-\alpha)\bullet_q K\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q L)^q=&\widetilde{F}(((1-\alpha)\beta^q+\alpha)^{\frac{1}{q}}L)^q=\\&(1-\alpha)\beta^q\widetilde{F}(L)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q=\\&(1-\alpha)\widetilde{F}(K)^q+\alpha\widetilde{F}(L)^q\end{aligned}$$

即(3)式中等号成立.

推论 1　设 $\widetilde{F}: S_o^n\longrightarrow(0,+\infty)$ 是正齐次的、增的凸函数，$0<q<1$. 设 $K,L\in S_o^n$，则

$$\widetilde{F}(K\,\widetilde{+}_qL)^q\leqslant\widetilde{F}(K)^q+\widetilde{F}(L)^q \tag{8}$$

当 $\widetilde{F}: S_o^n\longrightarrow(0,+\infty)$ 为严格增时，(8)式中等号成立当且仅当 K 与 L 互为膨胀.

证　设 $\alpha\in(0,1)$，由定理 1 和 $\widetilde{F}$ 的正齐次性，得到

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(K\,\widetilde{+}_qL)^q=&\widetilde{F}((1-\alpha)\bullet_q((1-\alpha)^{-\frac{1}{q}}K)\,\widetilde{+}_q\alpha\bullet_q(\alpha^{-\frac{1}{q}})L)^q\leqslant\\&(1-\alpha)\widetilde{F}((1-\alpha)^{-\frac{1}{q}}K)^q+\alpha\widetilde{F}(\alpha^{-\frac{1}{q}}L)^q=\\&\widetilde{F}(K)^q+\widetilde{F}(L)^q\end{aligned}$$

当 $\widetilde{F}$ 为严格增时，等号成立当且仅当 $(1-\alpha)^{-\frac{1}{q}}K$ 与 $\alpha^{-\frac{1}{q}}L$ 互为膨胀，所以 K 与 L 互为膨胀.

下面给出著名的对偶 Brunn-Minkowski 型不等式[3] 的一个简化证明：

定理 2　设 $K,L,K_{j+1},\cdots,K_n\in S_o^n$，$0<q<1$ 且 $j\in\{2,\cdots,n\}$，则

$$\widetilde{V}(K\,\widetilde{+}_qL,j;K_{j+1},\cdots,K_n)^{\frac{q}{j}}\leqslant\widetilde{V}(K,j;K_{j+1},\cdots,K_n)^{\frac{q}{j}}+\widetilde{V}(L,j;K_{j+1},\cdots,K_n)^{\frac{q}{j}}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 互为膨胀.

证　设 $K,L,K_{j+1},\cdots,K_n\in S_o^n$，

$$\widetilde{F}(K)=\widetilde{V}(K,j;K_{j+1},\cdots,K_n)^{\frac{1}{j}}$$

则 $\widetilde{F}$ 是正齐次的、严格增的正函数. 由文献[3]知 $\widetilde{F}$ 是凸函数. 所以由推论 1 知

$$\widetilde{F}(K\,\widetilde{+}_qL)^q\leqslant\widetilde{F}(K)^q+\widetilde{F}(L)^q$$

即

$$\widetilde{V}(K\,\widetilde{+}_qL,j;K_{j+1},\cdots,K_n)^{\frac{q}{j}}\leqslant\widetilde{V}(K,j;K_{j+1},\cdots,K_n)^{\frac{q}{j}}+\widetilde{V}(L,j;K_{j+1},\cdots,K_n)^{\frac{q}{j}}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀.

参考文献:

[1] GARDNER R J. Geometric Tomography [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] GRUBER P M. Convex and Discrete Geometry [M]. Berlin: Springer, 2007.

[3] SCHNEIDER R. Minkowski Addition [M]//Convex Bodies : the Brunn-Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[4] LUTWAK E. Dual Mixed Volumes [J]. Pacific J Math, 1975, 58(2): 531-538.

[5] LUTWAK E. Intersection Bodies and Dual Mixed Volumes [J]. Adv in Math, 1988, 71(2): 232-261.

[6] 杨 琴, 罗 淼. 平面上几个对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 74-78.

[7] FIREY W J. p-Means of Convex Bodies [J]. Math Scand, 1962, 10: 17-24.

[8] LUTWAK E. The Brunn-Minkowski-Firey Theory I: Mixed Volumes and the Minkowski Problem [J]. J Differential Geom, 1993, 38(1): 131-150.

[9] LUTWAK E. The Brunn-Minkowski-Firey Theory II [J]. Advance in Mathematics, 1996, 118(2): 244-294.

[10] ZOU D, XIONG G. A Unified Treatment for L_p Brunn-Minkowski Type Inequalities [J]. Comm Anal Geom, 2018, 26(2): 435-460.

[11] 杨 林, 罗 淼, 王贺军. L_p对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 79-83.

[12] 杨 林, 罗 淼, 吴笑雪, 等. L_p对偶 Minkowski 不等式的稳定性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(4): 37-40.

Dual L_q Transference Principle

TAO Jiang-yan, LI Xiao

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the dual L_q Brunn-Minowski theory is generalized based on the existing results and mainly discusses the dual L_q Brunn-Minowski type inequality and obtains few results. In this paper, a unified method for dealing with L_q Brunn-Minowski type inequality is given by means of literature review, which is called dual L_q transference principle. By using this principle, a simplified proof of the famous dual L_q Brunn-Minkowski type inequality about the dual mixed volume is given.

Key words: dual mixed volume; dual Brunn-Minkowski type inequalities; dual L_q Brunn-Minkowski type inequaliyies

责任编辑 廖 坤