第44卷 第12期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019年12月
Vol. 44 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.12.007

Ding f-投射模[①]

王艳霞， 杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：引入了 Ding f-投射左 R-模的概念. 证明了：由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于直和以及直和项封闭；若 R 是左凝聚环，则由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于纯扩张以及纯子模封闭.

关 键 词：Ding f-投射模；Ding 投射模；凝聚环

中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2019)12-0035-05

1960年，Auslander 和 Bridger 在双边 noetherian 环 R 上引入了有限生成模 G-维数的概念. 文献[1]推广了 Auslander 和 Bridger 的想法，在任意的环 R 上定义了 Gorenstein 投射模的概念. 文献[2]证明了在 noetherian 环 R 上的有限生成 R-模 M 是 Gorenstein 投射模当且仅当 M 是 G-维数为 0 的模，发现了 Gorenstein 投射模有许多投射模的性质. 文献[3]引入了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的两种特殊情况，分别叫做强 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein FP-内射模，这两种模的类在凝聚环上有许多性质类似于在 noetherian 环上 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的性质. 文献[4]重新命名强 Gorenstein 平坦模是 Ding 投射模，Gorenstein FP-内射模是 Ding 内射模. 由文献[5]的命题 10.2.6 知，有限表示模 M 是 Ding 投射模当且仅当在左完全环上，M 是 Gorenstein 投射模，Gorenstein 投射模是 Ding 投射模. 因此，由文献[4]的推论 4.6 知，在 Gorenstein 环上，Gorenstein 投射模是 Ding 投射模.

利用有限生成投射模，文献[2]引入并研究了 f-投射模. Gorenstein 投射模是投射模的一类重要推广，文献[6]利用有限生成 Gorenstein 投射模引入了 Gorenstein f-投射模. Ding 投射模是 Gorenstein 投射模的一种特殊情形. 受以上工作的启发，我们引入了 Ding f-投射模的概念.

我们给出了 Ding f-投射模的刻画，证明了：由所有 Ding f-投射模左 R-模的类关于直和以及直和项封闭；若 R 是左凝聚环，则由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于纯扩张以及纯子模封闭.

文中未解释的概念和符号，请参见文献[7-9].

本文中的 R 是带有单位元的结合环，所有模都是酉模. 对左 R-模 M，M^{**} 表示对偶模 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$，δ_M：$M \longrightarrow M^{**}$ 是自然赋值映射.

由文献[10]知，如果存在投射模的正合序列
$$P = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$
使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \longrightarrow P^1)$，且对任意平坦左 R-模 F，有 $\mathrm{Hom}_R(P, F)$ 是正合的，则左 R-模 M 是 Ding 投射模.

下面我们引入 Ding f-投射模的定义.

定义 1 如果对任意左 R-模，同态 f：$A \longrightarrow M$ 都可以通过有限生成 Ding 投射模左 R-模 P 分解，则左 R-模 M 是 Ding f-投射模，其中 A 是有限生成左 R-模.

等价地，对 M 的任意有限生成子模 N，包含映射 f：$N \longrightarrow M$ 可以通过有限生成 Ding 投射左 R-模 P

① 收稿日期：2019-01-18
基金项目：国家自然科学基金项目(11761060).
作者简介：王艳霞(1991-)，女，硕士研究生，主要从事环的同调理论的研究.

分解.

命题 1 有限生成左 R-模 M 是 Ding f-投射模当且仅当 M 是 Ding 投射模.

证 *必要性* 设有限生成左 R-模 M 是 Ding f-投射模. 则恒等映射 $1_M: M \longrightarrow M$ 可以通过有限生成 Ding 投射左 R-模 D 分解成 $g: M \longrightarrow D$ 和 $h: D \longrightarrow M$ 使得 $hg = 1_M$. 因此 M 是 D 的直和项. 故 M 是 Ding 投射模.

充分性 设 M 是有限生成 Ding 投射模. 则有限生成左 R-模 N 到 M 的同态 f 可以通过有限生成 Ding 投射左 R-模 M 分解. 故 M 是 Ding f-投射模.

记 $\Gamma = \{D_i: i \in I\}$ 是有限生成 Ding 投射左 R-模同构类的代表半单无赘集，且设

$$S = \mathrm{End}_R(\oplus_{i \in I} D_i)$$

设 A,B 是左 R-模. 则对任意 $f \in \mathrm{Hom}_R(A, \oplus_{i\in I} D_i)$，$g \in \mathrm{Hom}_R(\oplus_{i \in I} D_i, B)$，其中$a \in A$，有自然同态

$$\mathrm{Hom}_R(A, \oplus_{i\in I} D_i) \otimes_S \mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I} D_i, B) \xrightarrow{\sigma_{A,B}} \mathrm{Hom}_R(A, B)$$

其中

$$\sigma_{A,B}(f \otimes g)(a) = g(f(a))$$

引理 1 设 B 是左 R-模，则以下结论等价：

(i) B 是 Ding f-投射模；

(ii) 对任意有限生成左 R-模 A，$\sigma_{A,B}$ 是满同态.

证 (i)⇒(ii) 设 $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$. 因为 B 是 Ding f-投射模，所以 α 可以通过有限生成 Ding 投射左 R-模 $D_k \in \Gamma$ 分解. 存在 β: $A \longrightarrow G_k$ 和 $\gamma: G_k \longrightarrow B$，使得 $\alpha = \gamma\beta$. 设 π: $\oplus_{i\in I} D_i \longrightarrow D_k$ 是标准投射，且 λ: $D_k \longrightarrow \oplus_{i\in I} D_i$ 是标准内射. 取

$$f = \lambda\beta \in \mathrm{Hom}_R(A, \oplus_{i\in I} D_i)$$
$$g = \gamma\pi \in \mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I} D_i, B)$$

因为 $\alpha = \sigma_{A,B}(f \otimes g)$，所以 $\sigma_{A,B}$ 是满同态.

(ii)⇒(i) 设 A 是有限生成左 R-模，且 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$. 则存在

$$f_i \in \mathrm{Hom}_R(A, \oplus_{i\in I} D_{i\in I})$$
$$g_i \in \mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I} D_i, B)$$
$$i = 1, 2, \cdots, n$$

使得

$$\varphi = \sigma_{A,B}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right)$$

因为 A 是有限生成的，所以存在有限指标集 $J \subseteq I$，使得

$$\mathrm{Im}(f_i) \subseteq \oplus_{j\in J} D_j \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

定义 ψ: $A \longrightarrow (\oplus_{j\in J} D_j)^n$ 为

$$a \longmapsto (f_1(a), f_2(a), \cdots, f_n(a))$$

且 ξ: $(\oplus_{j\in J} D_j)^n \longrightarrow B$ 为

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} g_i(c_i) \qquad c_i \in \oplus_{j\in J} G_j$$

则 $\varphi = \xi\psi$. 因为$(\oplus_{j\in J} D_j)^n$ 是有限生成 Ding 投射模，所以 B 是 Ding f-投射模.

由文献[5]知，如果对任意有限表示模 F，序列 $\mathrm{Hom}_R(F, B) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(F, C) \longrightarrow 0$ 是正合的，则正合序列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ 是纯的.

下面给出本文的主要结果.

定理 1 由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于直和以及直和项封闭，若 R 是左凝聚环，则由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于纯扩张以及纯子模封闭.

证 设$(M_j)_{j\in J}$ 是一族 Ding f-投射左 R-模，Q 是有限生成左 R-模. 对任意同态 f: $Q \longrightarrow \oplus_{j\in J} M_j$，

因为 Q 是有限生成的，所以存在有限指标集 $K\subseteq J$，使得 $\mathrm{Im}(f)\subseteq\oplus_{k\in K}M_k$．由引理 1 知

$$\mathrm{Hom}_R(Q,\oplus_{i\in I}D_i)\otimes_S \mathrm{Hom}(\oplus_{i\in I}D_i,M_k)\xrightarrow{\sigma_{Q,M_k}}\mathrm{Hom}_R(Q,M_k)\longrightarrow 0$$

正合．因此可以得到图 1.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Q,\oplus_{i\in I}D_i)\otimes_s \mathrm{Hom}(\oplus_{i\in I}D_i,\oplus_{k\in K}M_k) \arrow[r, "\sigma_{Q,\oplus_{k\in K}M_k}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(Q,\oplus_{k\in K}M_k) \arrow[d, "\cong"] & \\
\oplus_{k\in K}\mathrm{Hom}(Q,\oplus_{i\in I}D_i)\otimes_s \mathrm{Hom}(\oplus_{i\in I}D_i,M_k) \arrow[r, "\oplus_{k\in K}\sigma_{Q,M_k}"] & \oplus_{k\in K}\mathrm{Hom}(Q,M_k) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1　关于伴随同构的交换图

因为下行正合，所以 $\sigma_{Q,\oplus_{k\in K}M_k}$ 是满同态．由引理 1 知，$\oplus_{k\in K}M_K$ 是 Ding f-投射模．定义 $\tau: Q\longrightarrow\oplus_{k\in K}M_K$，使得对任意 $\chi\in Q$，$\tau(\chi)=f(\chi)$．则 τ 可以通过有限生成 Ding 投射模 Z 分解成 $\mu: Q\longrightarrow Z$ 和 $\upsilon: Z\longrightarrow\oplus_{k\in K}M_k$，使得 $\tau=\upsilon\mu$．设 $\iota:\oplus_{k\in K}M_K\longrightarrow\oplus_{j\in J}M_j$ 是包含映射，则 $f=\iota\tau=(\iota\upsilon)\mu$．因此 $\oplus_{j\in J}M_j$ 是 Ding f-投射模．故由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于直和封闭．

设 U 是 Ding f-投射左 R-模 V 的直和项．定义 $\pi: V\longrightarrow U$ 是标准投射，$i: U\longrightarrow V$ 是标准嵌入．对任意有限生成左 R-模 X 和任意同态 $\alpha: X\longrightarrow U$，存在有限生成 Ding 投射左 R-模 Y，$\beta: X\longrightarrow Y$ 和 $\gamma: Y\longrightarrow V$，使得 $i\alpha=\gamma\beta$，则

$$(\pi\gamma)\beta=(\pi i)\alpha=\alpha$$

因此 U 是 Ding f-投射模．故由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于直和项封闭．

设 R 是左凝聚环，且 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是左 R-模的纯正合序列．假设 A 和 C 是 Ding f-投射左 R-模．因为 $D_i\in\Gamma$ 是有限表示的，所以

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(D_i,A)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(D_i,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(D_i,C)\longrightarrow 0$$

是正合的．因此可以得到正合序列

$$0\longrightarrow\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(D_i,A)\longrightarrow\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(D_i,B)\longrightarrow\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(D_i,C)\longrightarrow 0$$

即

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I}D_i,A)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I}D_i,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I}D_i,C)\longrightarrow 0$$

正合．因此对任意有限生成左 R-模 N，可以得到图 2.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(N,\oplus D_i)\otimes_s\mathrm{Hom}(\oplus D_i,A) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{N,A}"] & \mathrm{Hom}(N,\oplus D_i)\otimes_s\mathrm{Hom}(\oplus D_i,B) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{N,B}"] & \mathrm{Hom}(N,\oplus D_i)\otimes_s\mathrm{Hom}(\oplus D_i,C) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{N,C}"] & 0 \\
\mathrm{Hom}(N,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(N,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(N,C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2　关于有限生成左 R-模 N 的交换图

因为 A 和 C 是 Ding f-投射左 R-模，所以由引理 1 知，$\sigma_{N,A}$ 和 $\sigma_{N,C}$ 是满的．由文献[5]的引理 3.14 知，$\sigma_{N,B}$ 也是满的．因此 B 是 Ding f-投射模，故由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于纯扩张封闭．

设 R 是左凝聚环，且 $0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon}B\xrightarrow{\rho}C\longrightarrow 0$ 是左 R-模的纯正合序列．假设 B 是 Ding f-投射左 R-模．对任意有限生成左 R-模 M 和任意同态 $\alpha: M\longrightarrow A$．因为 B 是 Ding f-投射模，所以存在有限生成 Ding 投射左 R-模 D，$\gamma: M\longrightarrow D$ 和 $\psi: D\longrightarrow B$，使得 $\varepsilon\alpha=\psi\gamma$．设 $M\xrightarrow{\gamma}D\xrightarrow{\varphi}L\longrightarrow 0$ 是正合序列．则存在 $\beta: L\longrightarrow C$，使得图 3 交换．

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] & D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dotted, "\theta"] & L \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\beta"] \arrow[dl, dotted, "\eta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon"] & B \arrow[r, "\rho"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 3　关于 Ding f-投射模分解和纯正合列的交换图

因为 R 是左凝聚环，所以 D 是有限表示的，且 L 也是有限表示的. 又因为

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, C) \longrightarrow 0$$

是正合的. 所以存在 η: $L \longrightarrow B$，使得 $\beta = \rho\eta$. 于是存在同态 θ: $D \longrightarrow A$，使得 $\alpha = \theta\gamma$. 因此 A 是 Ding f-投射模. 故由所有 Ding f-投射左 R-模构成的类关于纯子模封闭.

由文献[11]知，如果每个有限生成无挠右 R-模是有限表示的，则 R 是右 Π-凝聚环. 由文献[5]知，如果 δ_M: $M \longrightarrow M^{**}$ 是单同态，则左 R-模 M 是无挠模. 本文中，我们用 $\mathrm{Dpd}_R M$ 表示左 R-模 M 的 Ding 投射维数. 若存在最小的非负整数 n，使得 M 有长度为 n 的 Ding 投射分解，则记 $\mathrm{Dpd}_R M \leqslant n$；若 n 不存在，则记 $\mathrm{Dpd}_R M = \infty$. 我们用 $\mathrm{LDPD}(R)$ 表示 R 的左整体 Ding 投射维数，即

$$\mathrm{LDPD}(R) = \sup\{\mathrm{Dpd}_R M: M \text{ 是左 } R \text{-模}\}$$

定理 2 设 R 是右 Π-凝聚环，且 $\mathrm{LDPD}(R) \leqslant n$. 若存在正合序列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^{n-1}$$

其中 F_i 是 f-投射模，则 M 是 Ding f-投射模左 R-模.

证 设

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^{n-1} \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

是正合序列. 对任意有限生成左 R-模 N 和同态 f: $N \longrightarrow M$，由文献[12]的推论 3.12 知，每个有限生成左R-模有 f-投射预包络. 因此，我们可以构造复形

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{n-1} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

其中每个 P^i 是有限生成投射的，使得对任意 f-投射左 R-模 Q，上述序列是 $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ 正合的. 因为 D 是有限表示的，所以存在正合序列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

其中 P_i 是有限生成投射的. 则 C 是有限生成 Ding 投射左 R-模. 我们可以得到图 4.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P^{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & F^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^{n-2} \arrow[r] & F^{n-1} \arrow[r] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 4 关于比较引理的交换图

我们也可以得到图 5.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "h"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P^{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & F^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^{n-2} \arrow[r] & P^{n-1} \arrow[r] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 5 关于同伦引理的交换图

由同伦引理知，$f - \alpha h$ 可以通过 ι: $N \longrightarrow P^0$ 分解. 即存在 β: $P^0 \longrightarrow M$，使得 $f = \alpha h + \beta\iota$. 因此 f 可以通过有限生成 Ding 投射模左 R-模 $C \oplus P^0$ 分解. 故 M 是 Ding f-投射模.

参考文献:

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 200(1): 611-633.

[2] AZUMAYA G. Finite Splitness and Finite Projectivity [J]. J Algebra, 1987, 106(1): 114-134.

[3] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly Gorenstein Flat Modules [J]. J Aust Math Soc, 2009, 86(3): 323-338.

[4] GILLESPIE J. Model Structures on Modules Over Ding-Chen Rings [J]. Homology, Homotopy and Appl, 2010, 12(1): 61-73.

[5] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin, New York: De Gruyter, 2000.

[6] MAO L X. Rings Satisfying Every Finitely Generated Module Has a Gorenstein Projective (pre)Envelope [J]. Comm Algebra, 2018, 46(5): 2010-2022.

[7] 叶星美，杨晓燕. n-强 F-Gorenstein 投射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(10)：84-88.

[8] 陈文静，杨晓燕. 强和强泛 Gorenstein FP-内射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(8)：75-78.

[9] 李倩倩，杨晓燕. n-强 Gorenstein AC-投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：36-40.

[10] YANG G, LIU Z K, LIANG L. Ding Projective and Ding Injective Module [J]. Algebra Colloq, 2013, 20(4): 601-612.

[11] CAMILLO V. Coherence for Polynomial Rings [J]. J Algebra, 1990, 132(1): 72-76.

[12] DING N Q, CHEN J L. Relative Coherence and Preenvelopes [J]. Manus Math, 1993, 81(1): 243-262.

On Ding f-Projective Modules

WANG Yan-xia,　YANG Xiao-yan

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In the paper, the concept of Ding f-projective left R-modules has been introduced. It shows that the class of all Ding f-projective left R-modules is closed under direct sums and direct summands, the class of all Ding f-projective left -modules is closed under pure extensions and pure submodules when is left coherent.

Key words: Ding f-projective module; Ding projective module; coherent

责任编辑　廖　坤